บทที่ 2 จลศาสตร์

(kinematics)

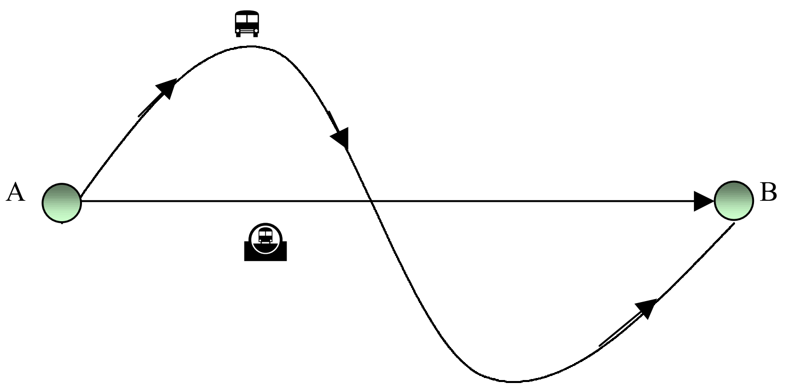
จลศาสตร์เป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาค โดยไม่คำนึงถึงสาเหตุของการเคลื่อนที่หรือผลของแรงที่กระทำ แต่จะศึกษาว่าวัตถุหรืออนุภาคนั้นเคลื่อนที่ได้อย่างไร โดยพิจารณาองค์ประกอบของการเคลื่อนที่ เช่น การกระจัด ความเร็วและความเร่ง ทั้งในกรณีของการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงและการเคลื่อนที่แบบวงกลมโดยใช้ระบบพิกัดฉาก (x , y , z) เป็นกรอบอ้างอิง

1. องค์ประกอบของการเคลื่อนที่

1.1 ระยะทางและการกระจัด

ระยะทาง (Distance) หมายถึงระยะจากจุดเริ่มต้นจนถึงจุดสุดท้ายของการเคลื่อนที่ของวัตถุตามเส้นทางการเคลื่อนที่นั้นๆ โดยเส้นทางการเคลื่อนที่อาจจะเป็นเส้นตรงหรือเป็นทางโค้งก็ได้ เนื่องจากระยะทางมีทิศทางไม่แน่นอนจึงจัดให้เป็นปริมาณสเกลาร์ มีหน่วยเป็นเมตร (m) แทนด้วย r

การกระจัด (Displacement) หมายถึงปริมาณการเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้นไปสู่ตำแหน่งสุดท้ายในแนวเส้นตรง โดยมีทิศทางตามทิศทางการเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุนั้น เนื่องจากการกระจัดเป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง การกระจัดจึงเป็นปริมาณเวกเตอร์ มีหน่วยเป็น m แทนด้วย $\vec{r}$



รูปที่ 2.1 แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุจาก A ไป B

จากรูป ระยะที่วัตถุเคลื่อนที่จาก A ไปยัง B ตามเส้นทางที่ เป็น**การกระจัด**จากจุด A ไปยังจุด B

ระยะที่วัตถุเคลื่อนที่จาก A ไปยัง B ตามเส้นทางที่ 🚌 เป็น**ระยะทาง**จากจุด A ไปยังจุด B

1.2 อัตราเร็วและความเร็ว

***<u>อัตราเร็ว</u>* (Speed)** ของอนุภาคหรือวัตถุใด ๆ แทนด้วยสัญลักษณ์ v หมายถึง อัตราส่วนระหว่างระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ในช่วงเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ โดยในช่วงเวลาหนึ่งอัตราเร็วอาจจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงก็ได้ จึงแทนด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย จะได้

$$v_{av} = \frac{r}{t} \qquad (1)$$

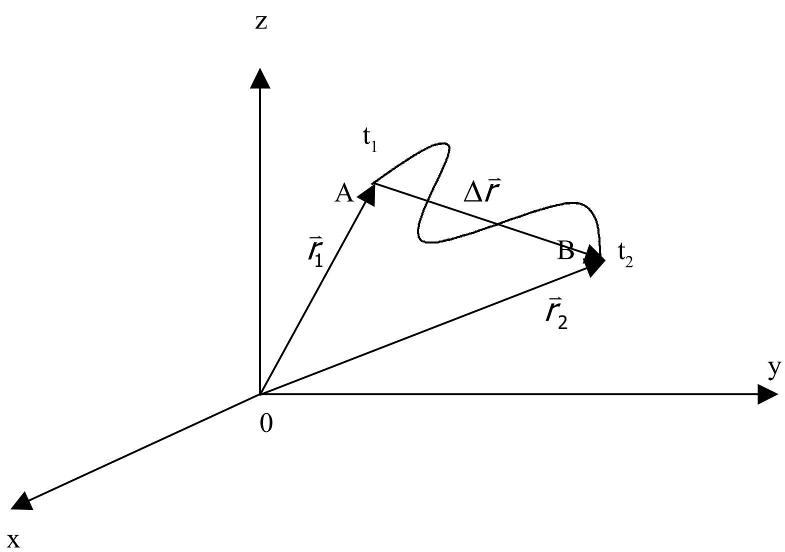
โดย v_{av} แทน อัตราเร็วเฉลี่ย มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที (m/s)

r แทน ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ มีหน่วยเป็น เมตร (m)

t แทน ช่วงเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่ มีหน่วยเป็นวินาที (s)

***<u>ความเร็ว</u>* (Velocity)** ของอนุภาคหรือวัตถุใด ๆ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{v}$ หมายถึง อัตราส่วนระหว่างระยะกระจัดที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้กับในช่วงเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที แบ่งเป็น

1.2.1 ความเร็วเฉลี่ย (average velocity , $\bar{v}_{av}$) คือ การกระจัดที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ กำหนดให้วัตถุเริ่มต้นอยู่ที่จุด A ในขณะที่เวลาเป็น t_1 เวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคเป็น $\bar{r}_1$ โดยเป็นเวกเตอร์ตำแหน่งที่ลากจากจุด O ไปยังจุด A เมื่อเวลาผ่านไปเป็น t_2 วัตถุเคลื่อนที่ไปยังจุด B โดยมีเวกเตอร์ตำแหน่งเป็น $\bar{r}_2$ ดังรูป คำนวณหาค่าความเร็วเฉลี่ยได้โดย



รูปที่ 2.2 แสดงการกระจัดของวัตถุจากจุด A ไปยังจุด B

$$\bar{v}_{av} = \frac{\text{การกระจัดทั้งหมดที่วัตถุเคลื่อนที่}}{}$$

ช่วงเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่

$$\bar{v}_{av} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \qquad (2)$$

โดย $\Delta \bar{r}$ = $\bar{r}_2$ - $\bar{r}_1$ คือการขจัดที่วัตถุเคลื่อนที่จาก A ไป B มีหน่วยเป็น m

Δt = t_2 - t_1 คือช่วงเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่จาก A ไป B มีหน่วยเป็น s

ความเร็วตามสมการที่ 2 เป็นความเร็วเฉลี่ย เพราะการวัดระยะทางการเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาคจาก A ไป B เป็นการวัดระยะกระจัดในแนวเส้นตรง แต่ในความเป็นจริงวัตถุหรืออนุภาคอาจจะเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งก็ได้ และความเร็วอาจจะสม่ำเสมอหรือไม่สม่ำเสมอก็ได้ ดังนั้นในการหาค่าความเร็วเฉลี่ยจะต้องหาจากการกระจัดกับเวลาทั้งหมด โดยความเร็วเฉลี่ยที่ได้นี้เป็นปริมาณเวกเตอร์ มีหน่วยเป็น m/s โดยมีทิศทางเดียวกับการกระจัดที่วัตถุหรืออนุภาคเคลื่อนที่

1.2.2 ความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous velocity) คือ ความเร็วเฉลี่ยที่พิจารณาในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งเท่านั้น โดยช่วงเวลาของการพิจารณาความเร็วนี้มีค่าน้อยมาก ($\Delta t \rightarrow o$) หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้น ๆ ($\lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_{av}$) โดยปกติจะเรียกความเร็วขณะใดขณะหนึ่งว่า ความเร็ว โดยถ้า $\bar{v}$ แทนความเร็ว จะได้

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

ในทางคณิตศาสตร์ การหาลิมิตของ $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ เมื่อ $\Delta t \rightarrow 0$ คือการหาอนุพันธ์ของการกระจัดเทียบกับเวลา แทนด้วย $\frac{d\bar{r}}{dt}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad (3)$$

<u>องค์ประกอบของการกระจัดและความเร็วของวัตถุใน 3 มิติ</u>

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ใน 3 มิติ (ตามแกน x , y , z) จากความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ตำแหน่ง สามารถคำนวณหาการกระจัดและความเร็วของอนุภาคหรือวัตถุได้ดังนี้ ถ้า $\Delta \bar{r}$ แทนการกระจัดของวัตถุตามแกน (x , y , z) จะได้

$$\Delta \bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$$

ถ้า $\bar{r}_2 = r_{x2}\hat{i} + r_{y2}\hat{j} + r_{z2}\hat{k}$; $\bar{r}_1 = r_{x1}\hat{i} + r_{y1}\hat{j} + r_{z1}\hat{k}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\Delta\bar{r} &= (r_{x2}\hat{i} + r_{y2}\hat{j} + r_{z2}\hat{k}) - (r_{x1}\hat{i} + r_{y1}\hat{j} + r_{z1}\hat{k}) \\
&= (r_{x2} - r_{x1})\hat{i} + (r_{y2} - r_{y1})\hat{j} + (r_{z2} - r_{z1})\hat{k} \\
\Delta\bar{r} &= r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

โดยขนาดของ $\Delta\bar{r}$ แทนด้วย r คำนวณได้ดังนี้

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \qquad (5)$$

ทิศทางของการกระจัดของวัตถุ คำนวณได้จากโคไซน์บอกทิศทาง โดย

$$\theta_x = \cos^{-1}\frac{r_x}{r} \quad , \quad \theta_y = \cos^{-1}\frac{r_y}{r} \quad , \quad \theta_z = \cos^{-1}\frac{r_z}{r} \qquad (6)$$

คำนวณหาค่าความเร็วของวัตถุได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{d\bar{r}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}) \\
&= \frac{dr_x}{dt}\hat{i} + \frac{dr_y}{dt}\hat{j} + \frac{dr_z}{dt}\hat{k} \\
\bar{v} &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

สมการที่ (7) แทนองค์ประกอบของความเร็วใน 3 มิติ โดยขนาดของ $\bar{v}$ แทนด้วย v คำนวณได้ดังนี้

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (8)$$

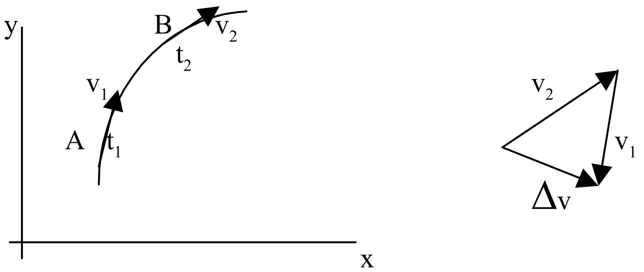
ทิศทางของความเร็วของวัตถุ ที่ทำกับแกน x , y , z คำนวณได้จาก

$$\theta_x = \cos^{-1}\frac{v_x}{v} \quad , \quad \theta_y = \cos^{-1}\frac{v_y}{v} \quad , \quad \theta_z = \cos^{-1}\frac{v_z}{v} \qquad (9)$$

1.3 ความเร่ง (acceleration)

ความเร็วในการเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาคเป็นปริมาณเวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยขนาดและทิศทาง การเปลี่ยนแปลงความเร็วอาจจะเปลี่ยนเฉพาะขนาดหรือทิศทางหรืออาจจะเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทางพร้อม ๆ กัน การเคลื่อนที่ที่ความเร็วเปลี่ยนแปลงนี้ เรียกว่ามีการเกิดความเร่งขึ้น ดังนั้น*ความเร่งของวัตถุหรืออนุภาคคือการเปลี่ยนความเร็วของวัตถุเทียบกับเวลา* เป็นปริมาณเวกเตอร์ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{a}$ มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที^{2} (m/s^2) แบ่งเป็น

1.3.1 ความเร่งเฉลี่ย (average acceleration , $\bar{a}_{av}$) คือความเร็วของวัตถุหรืออนุภาคที่เปลี่ยนไปเทียบกับช่วงเวลาที่เปลี่ยนไปในการเคลื่อนที่ จากรูปที่ 2.3 อนุภาคหนึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปตามระนาบ x , y โดยที่เวลา t_1 วัตถุอยู่ที่จุด A และมีความเร็ว v_1 เมื่อเวลาผ่านไปเป็น t_2 วัตถุอยู่ที่จุด B และมีความเร็ว v_2



รูปที่ 2.3 วัตถุเคลื่อนที่บนระนาบ x , y โดยที่จุด A มีความเร็ว v_1 และที่จุด B มีความเร็ว v_2 และรูปสามเหลี่ยมแสดงการเปลี่ยนแปลงความเร็ว $\Delta v = v_2 - v_1$

ดังนั้นความเร่งเฉลี่ยของวัตถุในการเคลื่อนที่จากจุด A ไปยัง B คำนวณได้ดังนี้

$$\bar{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1} \qquad (10)$$

โดย $\Delta \vec{v}$ แทนความเร็วของวัตถุที่เปลี่ยนไป มีหน่วยเป็น m/s

Δt แทนช่วงเวลาที่เปลี่ยนไปในการเคลื่อนที่ของวัตถุ มีหน่วยเป็น s

1.3.2 ความเร่งขณะใดขณะหนึ่ง (instantaneous acceleration) คือความเร่งเฉลี่ยของวัตถุที่พิจารณาในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งเท่านั้น โดยช่วงเวลาที่พิจารณามีค่าน้อยมาก ($\Delta t \rightarrow$o) ซึ่ง เป็นการพิจารณาความเร่งของวัตถุที่จุดใดจุดหนึ่ง บางทีเรียกความเร่งขณะใดขณะหนึ่งว่า ความเร่ง แทนด้วย $\bar{a}$ ดังนั้น

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\bar{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (11)$$

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ใน 3 มิติ จะได้ความเร่งของวัตถุเป็นดังนี้

$$\bar{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \qquad (12)$$

สมการที่ (12) แทนองค์ประกอบของความเร่งใน 3 มิติ โดยขนาดของ $\bar{a}$ แทนด้วย a คำนวณได้ดังนี้

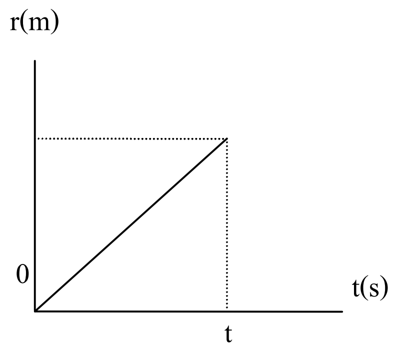
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (13)$$

ทิศทางของความเร่งของวัตถุ คำนวณได้จาก

$$\theta_x = \cos^{-1}\frac{a_x}{a} \quad , \ \theta_y = \cos^{-1}\frac{a_y}{a} \quad , \ \theta_z = \cos^{-1}\frac{a_z}{a} \qquad (14)$$

1.4 การคำนวณหาการกระจัด ความเร็วและความเร่งโดยใช้กราฟ

ในบางกรณีลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุอาจกำหนดในรูปแบบของกราฟ โดยจากกราฟที่กำหนดให้เป็นการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุใน 1 มิติ (ตาม แกน x หรือ y) การหาค่าขนาดความเร็วเฉลี่ยอาจจะคำนวณได้จากความชันของกราฟระหว่างการกระจัดกับเวลาได้ ดังต่อไปนี้

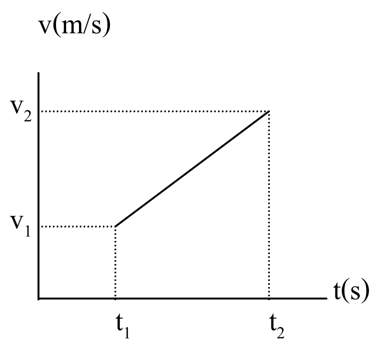


$$\bar{v}_{av} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$$

ดังนั้น

$$\boxed{v_{av} = \text{Slope ของกราฟ r กับ t}} \qquad (15)$$

และหาค่าขนาดความเร่งเฉลี่ยอาจจะคำนวณได้จากความชันของกราฟระหว่างการความเร็วกับเวลาได้ ดังต่อไปนี้



$$\bar{a}_{av} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$$\boxed{a_{av} = \text{Slope ของกราฟ v กับ t}} \qquad (16)$$

ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่คำนวณได้จาก

$$\bar{v}_{av} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} \quad \text{โดย} \quad \Delta\bar{r} = v\Delta t$$

ดังนั้นจะได้

$$\boxed{r = \text{พื้นที่ใต้กราฟระหว่าง v กับ t}} \qquad (17)$$

2. การเคลื่อนที่ (motion)

ในหัวข้อนี้ แบ่งการเคลื่อนที่ของวัตถุ ออกเป็น 3 กรณี คือ

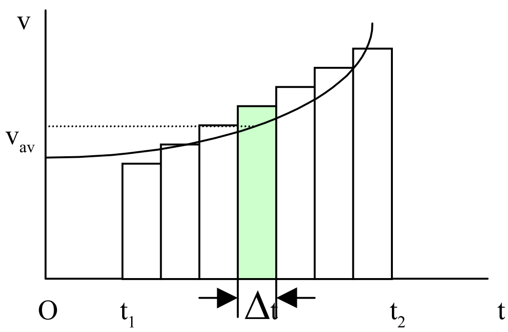
2.1 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งไม่คงที่

2.2 การเคลื่อนที่ใน 1 มิติด้วยความเร่งคงที่

2.3 การเคลื่อนที่ใน 2 มิติ

2.1 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งไม่คงที่

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะทราบความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด ความเร็ว และความเร่งของวัตถุ ทำให้สามารถวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อความเร่งไม่คงที่ได้ดังนี้



ในขณะที่วัตถุเคลื่อนที่ความเร็วของวัตถุอาจมีค่าไม่คงที่โดยเปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังกราฟซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลา ดังนั้นในการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 ต้องแบ่งการพิจารณาออกเป็นช่วงเวลาน้อย ๆ (Δt) และคำนวณหาระยะกระจัดที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในช่วงเวลา Δt จาก $\Delta r = v_{av}\Delta t$ ซึ่งก็คือพื้นที่ใต้กราฟส่วนที่แรเงา แต่ถ้าต้องการหาระยะกระจัดทั้งหมดที่วัตถุเคลื่อนที่จะต้องหาพื้นที่ใต้กราฟทั้งหมดในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 โดยการแบ่งให้ช่วงเวลาสั้น ๆ และบวกอย่างต่อเนื่องซึ่งก็คือการอินทิเกรทนั่นเอง ดังนั้น ถ้า $\vec{r}$ (t) , $\vec{v}$ (t) แทนการกระจัด ความเร็วซึ่งเป็นฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา จะได้ว่า

$$\vec{r} = \int_{t1}^{t2} \vec{v}dt \qquad (18)$$

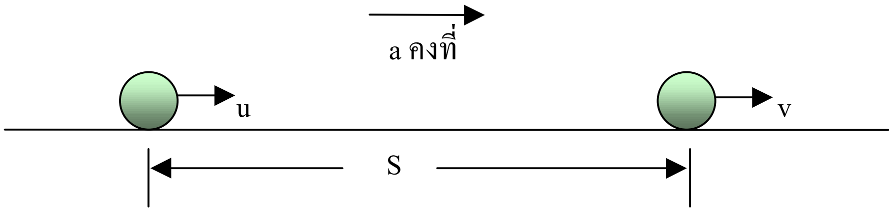
ในทำนองเดียวกันถ้าต้องการหาความเร็วของวัตถุ ในกรณีที่กำหนดความเร่งไม่คงที่โดยเปลี่ยนแปลงตามเวลา สามารถหาความเร็วได้จาก

$$\vec{v} = \int_{t1}^{t2} \vec{a}dt \qquad (19)$$

2.2 การเคลื่อนที่ใน 1 มิติด้วยความเร่งคงที่

2.2.1 การเคลื่อนที่ใน 1 มิติในแนวราบด้วยความเร่งคงที่ หมายความว่าอนุภาคหรือวัตถุเคลื่อนที่ไปด้วยความเร่งที่คงที่ทั้งขนาดและทิศทางในแกน x หรือแกน y (a_x คงที่ หรือ a_y คงที่)

กำหนดให้วัตถุเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงด้วยความเร่ง a คงที่ โดยเริ่มต้นวัตถุมีความเร็ว u เมื่อเวลาผ่านไป t วัตถุมีความเร็ว v โดยเคลื่อนที่ได้ทาง S



จากสมการที่ 11 $$a = \frac{dv}{dt}$$

โดยที่เวลา t = 0 s ความเร็วของวัตถุเป็น u และที่เวลา t = t s ความเร็วของวัตถุเปลี่ยนเป็น v และความเร่งของวัตถุมีค่าคงที่เท่ากับ a จะได้

$$\int_u^v dv = \int_0^t a\,dt$$

$$v - u = at$$

หรือ $$\boxed{v = u + at} \qquad (20)$$

คำนวณหาระยะขจัดที่วัตถุเคลื่อนที่ได้จากสมการที่ (3)

$$v = \frac{dr}{dt}$$

โดยที่เวลา t = 0 s การกระจัดของวัตถุเท่ากับ 0 (วัตถุอยู่ที่จุดตั้งต้น) และที่เวลา t = t s วัตถุเคลื่อนที่ได้การกระจัด S จะได้

$$\int_0^S dr = \int_0^t v\,dt$$

จากสมการที่ (20) แทนค่า v แล้ว อินทิเกรททั้งสองข้างจะได้

$$\int_0^S dr = \int_0^t (u + at)\,dt$$

$$S = ut + \frac{at^2}{2}$$

หรือ $$\boxed{S = ut + \frac{1}{2}at^2} \qquad (21)$$

สมการที่ 21 สามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$S = \frac{t}{2}(2u + at) = \frac{t}{2}(u + u + at)$$

จากสมการที่ (20) แทน $v = u + at$ ในสมการนี้จะได้

$$\boxed{S = \frac{(u + v)}{2}t} \qquad (22)$$

จากสมการที่ (11) เขียนใหม่โดยใช้กฎลูกโซ่จะได้

$$a = \frac{dv}{dt} = (\frac{dv}{dx})(\frac{dx}{dt})$$

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

โดยการกระจัดเริ่มต้นของวัตถุเท่ากับ 0 (วัตถุอยู่ที่จุดตั้งต้น) วัตถุมีความเร็วต้น u เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ได้การกระจัด x วัตถุมีความเร็ว v

$$\int_u^v vdv = \int_0^x adx$$

หรือ $$\boxed{v^2 = u^2 + 2as} \qquad (23)$$

<u>สรุป</u> การเคลื่อนที่ในแนวราบด้วยความเร่ง a คงที่ มีสูตรคำนวณ ดังนี้

$$v = u+at \qquad \text{-(I)}$$

$$S = \left(\frac{u + v}{2}\right)t \qquad \text{-(II)}$$

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{-(III)}$$

$$v^2 = u^2 + 2aS \qquad \text{-(IV)}$$

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ในแนวราบด้วยความเร็วคงที่ แสดงว่า ความเร่งเป็นศูนย์ (a = 0) หาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้จาก

และความเร็วที่วัตถุเคลื่อนที่

$$\left.\begin{aligned} S &= vt \\ v &= \frac{S}{t} \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

2.2.2 การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งภายใต้แรงดึงดูดของโลก

การเคลื่อนที่แบบเส้นตรงใน 1 มิติ ในแนวแกน y ด้วยความเร่งคงที่ เช่นการโยนวัตถุขึ้นหรือปล่อยวัตถุให้ตกลงตามแนวดิ่ง จะเกิดความเร่งของวัตถุที่หล่นลงสู่พื้นโลก ความเร่งดังกล่าวนี้เกิดจากแรงดึงดูดของโลกที่กระทำกับวัตถุ อันที่จริงแล้วแรงดึงดูดจะแรงเพิ่มไปกับมวลของวัตถุและการเคลื่อนที่ของวัตถุจะถูกต้านโดยอากาศ แต่ในที่นี้จะไม่คำนึงถึงมวลของวัตถุ และแรงต้านทานของอากาศโดยถือว่าไม่มีแรงใด ๆ มากระทำบนวัตถุนอกจากแรงดึงดูดของโลกเท่านั้น ถ้าให้ g แทนความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก โดยขนาดของความเร่ง g มีค่า 9.8 m/s^2 คงที่และทิศทางพุ่งสู่จุดศูนย์กลางของโลก ดังนั้นจากสมการที่ (20) , (21) และ (23) โดย $a = g$ จะได้สมการในแนวดิ่งการเคลื่อนที่ภายใต้แรงดึงดูดของโลก เป็นดังนี้ คือ

$$v_y = u_y + gt \qquad (25)$$

$$S_y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2 \qquad (26)$$

$$v_y^2 = u_y^2 + 2gS_y \qquad (27)$$

โดยที่ v_y = ความเร็วของวัตถุในทิศตามแกน y มีหน่วยเป็น m/s

u_y = ความเร็วต้นของวัตถุในทิศตามแกน y มีหน่วยเป็น m/s

S_y = การขจัดของการเคลื่อนที่ในทิศตามแกน y มีหน่วยเป็น m

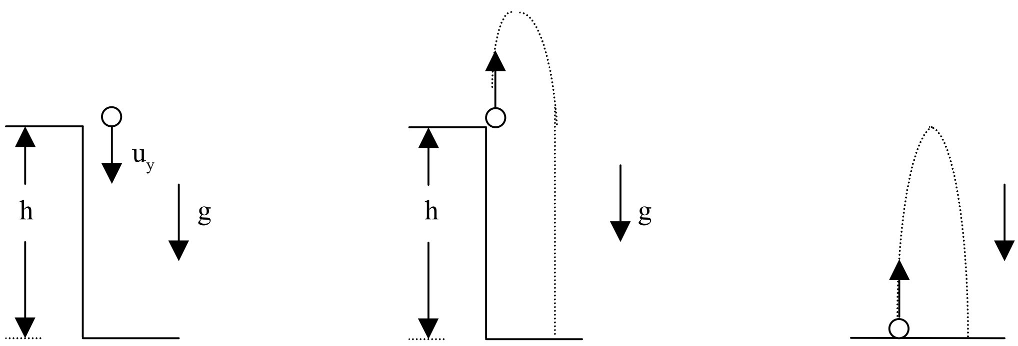
t = เวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่ มีหน่วยเป็น s

เนื่องจากปริมาณ v_y ,u_y , S_y และ g เป็นปริมาณเวกเตอร์ จึงต้องมีการกำหนดทิศทางเพื่อไม่ให้เกิดการสับสนในขั้นตอนการคำนวณ ดังนั้นในหนังสือเล่มนี้

กำหนดให้ เวกเตอร์ที่มีทิศเดียวกับ u_y ให้มีเครื่องหมาย บวก (+)

เวกเตอร์ที่มีทิศตรงข้ามกับ u_y ให้มีเครื่องหมาย ลบ (-)

ถ้า h ระยะกระจัดที่วัตถุเคลื่อนที่ (m) , g แทนความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง(m/s^2) , v_y เป็นความเร็วปลายของวัตถุ (m/s)



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 2.4 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่แนวดิ่งในแบบต่าง ๆ

รูป (ก) จะได้ u_y เป็น + , g เป็น + และ S_y เป็น +

(ข) จะได้ u_y เป็น + , g เป็น - และ S_y เป็น -

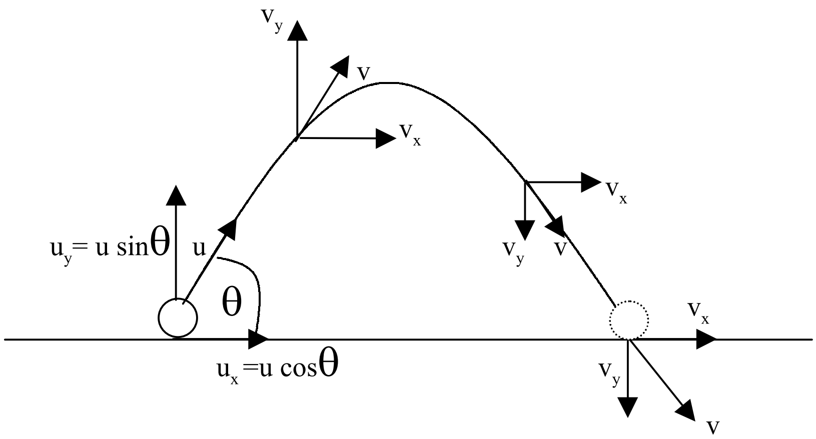
(ค) จะได้ u_y เป็น + , g เป็น - และ S_y เป็น 0

2.3 การเคลื่อนที่ใน 2 มิติ แบ่งเป็น

2.3.1 การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์ (Projectile motion)

การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์เป็นการเคลื่อนที่ในลักษณะ 2 มิติ โดยมีเส้นทางการเคลื่อนที่ในระนาบ x, y ได้แก่ การเคลื่อนที่ของลูกบอลที่ขว้างออกไป การเคลื่อนที่ของลูกกอล์ฟ การกระโดดไกล เป็นต้น ดังนั้นในการเคลื่อนที่ลักษณะนี้สามารถแยกองค์ประกอบของการเคลื่อนที่ได้ 2 แนวคือ

1. องค์ประกอบของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x หรือแนวราบ
2. องค์ประกอบของการเคลื่อนที่ในแนวแกน y หรือแนวดิ่ง



รูปที่ 2.5 แสดงส่วนประกอบของการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์

จากรูปให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น u ในทิศทำมุม θ กับแนวราบดังรูป ความเร็วของวัตถุจะมี 2 แนว คือ ความเร็วในแนวราบซึ่งมีค่าคงที่ โดยถือว่าแรงต้านอากาศมีค่าน้อยมาก และความเร็วในแนวดิ่งซึ่งมีค่าไม่คงที่เป็นผลเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก ดังนั้นความเร็วลัพธ์ของวัตถุแต่ละตำแหน่งของการเคลื่อนที่จึงมีค่าต่างกัน ทำให้วัตถุมีวิถีการเคลื่อนที่เป็นทางโค้ง โดย

ความเร็วต้นของวัตถุในแนวราบ $u_x = u\cos\theta$

ความเร็วต้นของวัตถุในแนวดิ่ง $u_y = u\sin\theta$

เนื่องจากความเร็วของวัตถุในแนวราบมีค่าคงที่ ดังนั้นในการหาค่าการกระจัดของวัตถุ คำนวณจาก

$$S_x \quad = \quad u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2 \tag{28}$$

โดย a_x คือความเร่งของวัตถุในแนวราบ มีค่าเป็น O ($\therefore$ ความเร็วแนวราบคงที่) จะได้

$$S_x \quad = \quad u_x t \tag{29}$$

ในการเคลื่อนที่แนวดิ่ง เนื่องจากวัตถุเคลื่อนที่ภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก ดังนั้นความเร่งของวัตถุในแนวดิ่ง ก็คือความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงนั่นเอง ($a_y = g$) โดยความเร็วของวัตถุจะเปลี่ยนแปลงตามเวลา จะได้

$$\left.\boxed{\begin{aligned} S_y &= u_y t + \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y^2 &= u_y^2 + 2gS_y \\ v_y &= u_y + gt \end{aligned}}\right\} \tag{30}$$

และถ้าต้องการคำนวณหาความเร็วที่จุดใด ๆ ในการเคลื่อนที่แบบวิถีโค้งนี้ สามารถคำนวณได้จาก

$$v_{\text{ลัพธ์}} \quad = \quad \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2} \tag{31}$$

จากรูป เมื่อแทนค่าความเร็วต้น $u_x = u\cos\theta$ และ $u_y = u\sin\theta$ ในสมการที่ (29) และ (30) จะได้

$$S_x = (u\cos\theta)t \qquad \text{ดังนั้นจะได้} \qquad t = \frac{S_x}{u\cos\theta}$$

$$S_y = (u\sin\theta)t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

เมื่อแทนค่า t ใน S_y จะได้

$$S_y = (u\sin\theta)\left(\frac{S_x}{u\cos\theta}\right) + \frac{1}{2}(-g)\left(\frac{S_x}{u\cos\theta}\right)^2$$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง S_y และ S_x ดังนี้

$$S_y = (\tan\theta)S_x - \left(\frac{g}{2u^2\cos^2\theta}\right)S_x^2$$

จากสมการข้างต้นพบว่า S_y และ S_x มีความสัมพันธ์ในรูปของสมการพาราโบลา ($y = ax + bx^2$) ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า การเคลื่อนที่แบบวิถีโค้งเป็นโค้งพาราโบลา

2.3.2 การเคลื่อนที่แบบวงกลม

การเคลื่อนที่ใน 2 มิติที่สำคัญอีกแบบหนึ่งที่สำคัญ คือ การเคลื่อนที่แบบวงกลม เพราะในธรรมชาตินั้นมีวัตถุหลายชนิดที่ทำงานโดยการหมุนหรือการเคลื่อนที่เป็นวงกลมหรือส่วนหนึ่งของเส้นโค้ง เช่น การหมุนของล้อ จานเสียง การเลี้ยวของรถ การเคลื่อนที่ของอิเลคตรอนในอะตอม ฯลฯ ดังนั้นจึงควรที่เราจะได้ศึกษาในรายละเอียดเกี่ยวกับปริมาณการเคลื่อนที่ต่าง ๆ ของวัตถุ โดย

เฉพาะอย่างยิ่งกรณีเส้นทางการเคลื่อนที่เป็นวงกลม เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาการเคลื่อนที่ในเส้นโค้งอื่น ๆ ต่อไป

การเคลื่อนที่แบบวงกลม คือ การเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีแนวทางการเคลื่อนที่เป็นระยะทางครบรอบ โดยการเคลื่อนที่แบบนี้จะมีทั้งปริมาณเชิงมุมและปริมาณเชิงเส้นดังนี้ คือ

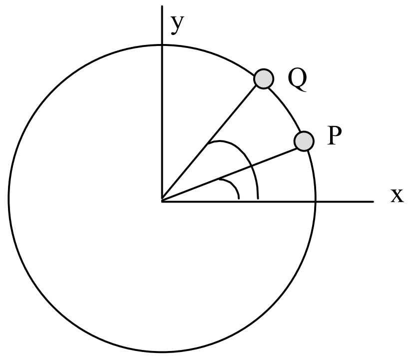
1. ปริมาณเชิงเส้น ได้แก่ การกระจัดเชิงเส้น ($\bar{s}, \bar{r}$) , ความเร็วเชิงเส้น ($\bar{v}$) และความเร็วเชิงเส้น ($\bar{a}$)
2. ปริมาณเชิงมุม ได้แก่ การกระจัดเชิงมุม (θ) , ความเร็วเชิงมุม (ω) และความเร่งเชิงมุม (α)

ในส่วนของปริมาณเชิงเส้นได้กล่าวไว้ในตอนต้นของบทนี้แล้ว ดังนั้นจึงจะอธิบายเกี่ยวกับปริมาณเชิงมุมดังต่อไปนี้

1. การกระจัดเชิงมุม (θ)

การบอกตำแหน่งของวัตถุหรืออนุภาคในการเคลื่อนที่แบบวงกลมนี้ จะบอกด้วยมุมซึ่งวัดจากแกนอ้างอิงมุมฉากจนถึงตำแหน่งที่วัตถุอยู่ โดยมุมสามารถคำนวณได้จากอัตราส่วนของความยาวส่วนโค้งต่อรัศมีของส่วนโค้ง เรียกมุมที่วัดได้ในหน่วยเรเดียนว่า ***ตำแหน่งเชิงมุม***

โดยกำหนดให้เริ่มต้นที่เวลา t_0 วัตถุอยู่ที่จุด P โดยวัดจากแกน x ได้ส่วนโค้งยาว S_0 โดยระยะจากจุดศูนย์กลางการหมุนถึงตำแหน่งที่วัตถุอยู่ ซึ่งก็คือรัศมีของส่วนโค้งมีค่า R เมื่อเวลาผ่านไป t วัตถุเคลื่อนมาอยู่ที่จุด Q สามารถหาตำแหน่งเชิงมุม θ_0 และ θ ของวัตถุที่จุด P และจุด Q ได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 2.6 แสดงการเคลื่อนที่เป็นวงกลมของอนุภาค

ตำแหน่งเชิงมุมของอนุภาคที่จุด P $\qquad \theta_0 = \frac{S_0}{R}$ rad

ตำแหน่งเชิงมุมของอนุภาคที่จุด Q $\qquad \theta = \frac{S}{R}$ rad

ดังนั้นระยะกระจัดเชิงมุมที่อนุภาคเคลื่อนที่ได้

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \frac{S - S_0}{R} = \frac{\Delta S}{R} \quad \text{rad} \qquad (32)$$

เมื่อ $\Delta\theta$ แทนการกระจัดเชิงมุม ของอนุภาคที่เคลื่อนที่จาก P ไปยัง Q โดยถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ในทิศทวนเข็มนาฬิกา $\Delta\theta$ มีเครื่องหมายเป็นบวก(มุมเพิ่มขึ้น) และถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ในทิศตามเข็มนาฬิกา $\Delta\theta$ มีเครื่องหมายเป็นลบ , Δs คือ การกระจัดเชิงเส้นวัดตามเส้นรอบวงเมื่อ $dt \rightarrow 0$ จึงทำให้ความยาวส่วนโค้ง S นี้น้อยมากจนเป็นเส้นตรง

อัตราส่วนเปรียบเทียบระหว่างมุมในหน่วยองศากับ เรเดียน(radian , rad) จะได้ว่า
$360^o = 2\pi$ *rad*

<u>2. ความเร็วเชิงมุม</u> ของอนุภาคหรือวัตถุใด ๆ แทนด้วยสัญลักษณ์ (ω) หมายถึง อัตราส่วนระหว่างการกระจัดเชิงมุมที่วัตถุเคลื่อนที่ในช่วงเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่เป็นวงกลม มีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที แบ่งเป็น

1. ความเร็วเชิงมุมเฉลี่ย (average angular velocity , ω_{av}) คือการกระจัดเชิงมุมที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลม โดยจากรูปที่ 2.6 อนุภาคเคลื่อนที่จาก P ไป Q ได้การกระจัดเชิงมุม $\Delta\theta$ ดังนั้น ความเร็วเชิงมุมเฉลี่ย (ω_{av}) ของวัตถุ ในช่วงเวลา $t = t_0$ ถึง $t = t$ มีค่าดังนี้

$$\omega_{av} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{rad/s} \qquad (33)$$

2.ความเร็วเชิงมุมขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous angular velocity) คือ ความเร็วเชิงมุมเฉลี่ยที่พิจารณาในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งเท่านั้น โดยช่วงเวลาของการพิจารณาความเร็วนี้มีค่าน้อยมาก ($\Delta t \rightarrow 0$) หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นความเร็วเชิงมุมเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้น ๆ ดังนั้น

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{rad/s} \qquad (34)$$

ความเร็วเชิงมุมเป็นปริมาณเวกเตอร์ มีทิศทางไปตามแกนหมุน

ถ้าให้ $\theta = \frac{S}{R}$ แทนการกระจัดเชิงมุมที่อนุภาคเคลื่อนที่ แทนค่าในสมการที่ (34)

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{S}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt}$$

$$\omega = \frac{v}{R} \quad \text{หรือ} \quad v = \omega R \qquad (35)$$

สมการที่ (35) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วในแนวเส้นสัมผัสกับความเร็วเชิงมุม และถ้าวัตถุ เคลื่อนที่เป็นวงกลมครบ 1 รอบ ($\theta = 2\pi$ rad) ใช้เวลา 1 คาบ (T) จะได้ความเร็วเชิงมุมดังนี้

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (36)$$

โดย T = คาบของการเคลื่อนที่ ซึ่งหมายถึงเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ มี หน่วยเป็น วินาที (s)

f = ความถี่ ซึ่งหมายถึงจำนวนรอบที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ใน 1 วินาที มีหน่วยเป็น รอบ/วินาที(rev/s)

<u>3. ความเร่งเชิงมุม</u> (α) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเชิงมุมในขณะที่วัตถุหรืออนุภาคเคลื่อนที่เป็นวงกลม มี 2 แบบคือ

3.1 ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ย (α_{av}) คือ อัตราส่วนของความเร็วเชิงมุมที่เปลี่ยนไปต่อเวลาที่วัตถุใช้ในการหมุน

$$\alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \quad \text{rad/s}^2 \qquad (37)$$

3.2 ความเร่งเชิงมุมขณะใดขณะหนึ่ง (α) คือ ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้น ๆ หรืออาจกล่าวได้ว่าเวลาที่พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคหรือวัตถุมีค่าน้อยมาก ($\Delta t \to 0$)

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \alpha_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{rad/s}^2 \qquad (38)$$

จากสมการ (35) $\omega = \frac{v}{R}$ แทนค่าใน (38)

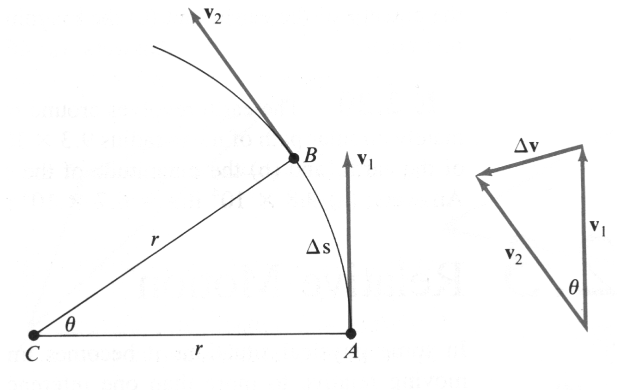
$$\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt}$$

$$\alpha = \frac{a_T}{R} \; ; \qquad a_T = \alpha R \qquad (39)$$

ในการเคลื่อนที่เป็นวงกลม ความเร่งในสมการที่ (39) นี้ มีทิศทางเดียวกับความเร็ว จึงเรียกความเร่งนี้ว่า ความเร่งในแนวเส้นสัมผัส (a_T)

4. *ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่แบบวงกลม*

ในกรณีวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลม ความเร่งในสมการที่ (39) มีทิศทางเดียวกับความเร็ว จึงเรียกความเร่งนี้ว่า ความเร่งแนวเส้นสัมผัส (a_T) ถ้าวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่ความเร่งในแนวเส้นสัมผัสจะมีค่าเป็นศูนย์ ($a_T=0$) แต่ทิศทางของความเร็วเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาในการเคลื่อนที่ ดังนั้นความเร่งที่เกิดขึ้นเป็นความเร่งที่เกิดจากการเปลี่ยนทิศทางของความเร็ว โดยพิจารณาจากรูปที่ 2.7 ได้ดังนี้



รูปที่ 2.7

ในขณะที่อนุภาคหรือวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมจากจุด A ไปยังจุด B ในช่วงเวลา Δt จะได้ส่วนโค้งยาว ΔS ได้รองรับมุม θ ในช่วงเวลาที่เท่ากัน การเปลี่ยนแปลงของความเร็วซึ่งเกิดจากการเปลี่ยนทิศทางของความเร็ว โดย $\Delta v = v_2 - v_1$ (ขนาดความเร็ว v_2 และ v_1 เท่ากับ v) ถ้า Δt ที่พิจารณามีค่าน้อยมาก ΔS และ θ มีค่าน้อย ดังนั้นจะได้ Δv จะตั้งฉากกับ v_1 ทำให้ทิศทางของความเร็วที่เปลี่ยน (Δv) มีทิศทางพุ่งเข้าสู่จุดศูนย์กลางของวงกลม จาก $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ดังนั้นทิศทางของความเร่งจะมีทิศเข้าสู่จุดศูนย์กลางของวงกลมด้วย เรียกความเร่งนี้ว่าความเร่งสู่ศูนย์กลาง แทนด้วย a_c โดยขนาดของความเร่งพิจารณาจากการเปรียบเทียบมุม θ ของสามเหลี่ยมในรูปที่ 2.7 ดังนี้

$$\frac{\Delta S}{r} \approx \frac{\Delta v}{v}$$

$$\Delta v \approx \frac{\Delta S}{r} v$$

จาก $a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ดังนั้นจะได้

$$a_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r}\left(\frac{\Delta S}{\Delta t}\right) = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta S}{\Delta t}\right)$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad (40)$$

สมการที่ (40) แทนขนาดของความเร่งสู่ศูนย์กลาง โดยทศทางของความเร่งนี้จะมีทิศทางเข้าสู่จุดศูนย์กลางของวงกลม

แต่ถ้าวัตถุเป็นวงกลมรัศมี R ด้วยความเร็วไม่สม่ำเสมอจะมีการเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทางของความเร็วก็จะทำให้เกิดความเร่งทั้งสองแนวคือ ความเร่งสู่ศูนย์กลาง(a_C) และความเร่งแนวเส้นสัมผัส (a_T) ดังนั้นจะได้ความเร่งลัพธ์ (a) ที่เกิดขึ้นมีคำนวณได้ดังนี้

$$a = \sqrt{(a_T)^2 + (a_C)^2} \qquad (41)$$

โดย $a_C = \dfrac{v^2}{R}$ มีทิศพุ่งเข้าสู่ศูนย์กลาง

$a_T = \alpha R$ มีทิศตามแนวเส้นสัมผัส

เปรียบเทียบความสัมพันธ์ของปริมาณเชิงเส้น และ ปริมาณเชิงมุมได้ในลักษณะเดียวกัน

	ปริมาณเชิงเส้น	ปริมาณเชิงมุม
	$V = \dfrac{dr}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
	$a = \dfrac{dv}{dt}$	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$
	$V = \int adt$	$\omega = \int \alpha dt$
	$r = \int vdt$	$\theta = \int \omega dt$
การกระจัด	$r, s = \theta R$	$\theta = \dfrac{s}{R}$
ความเร็ว	$v = \omega R$	$\omega = \dfrac{v}{R}$
ความเร่ง	$a = \alpha R$	$\alpha = \dfrac{a}{R}$

5. สมการการเคลื่อนที่เชิงมุมเมื่อความเร่งเชิงมุมคงที่

กำหนดให้เริ่มต้นวัตถุเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยความเร็วเชิงมุม ω_0 เมื่อเวลาผ่านไป t ความเร็วของวัตถุเป็น ω ได้การกระจัดเชิงมุม θ โดยความเร่งเชิงมุม α คงที่

จากสมการที่ (38) $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

$$\int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = \int_{o}^{t} \alpha \; dt$$

$$\omega - \omega_o = \alpha \; (t - O)$$

$$\boxed{\omega = \omega_o + \alpha t} \qquad (42)$$

จากสมการที่ (34) $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ แทนค่าในสมการที่ (42) จะได้

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_o + \alpha t$$

$$\int_o^\theta d\theta = \int_o^t (\omega_o + \alpha t)\ dt$$

$$\boxed{\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2} \qquad (43)$$

จาก $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$ (จากกฎลูกโซ่)

$$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

$$\int_{\omega_o}^{\omega} d\omega = \int_o^\theta \alpha d\theta$$

$$\frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2} = \alpha(\theta - 0)$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta} \qquad (44)$$

การเคลื่อนที่ในแนวราบด้วยความเร่ง a คงที่	การเคลื่อนที่ในแนวราบด้วยความเร่ง α คงที่
$v = u + at$	$\omega = \omega_o + \alpha t$
$S = \left(\frac{u+v}{2}\right)t$	$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t$
$S = ut + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = u^2 + 2aS$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$