

บทที่ 2 จลศาสตร์

(kinematics)

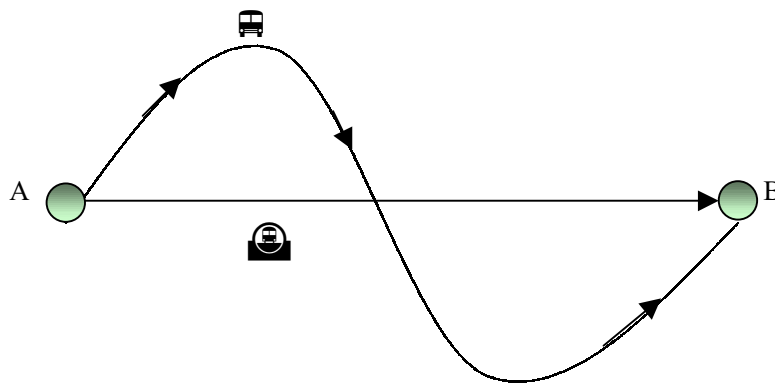
จลศาสตร์เป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาค โดยไม่คำนึงถึงสาเหตุของการเคลื่อนที่หรือผลของแรงที่กระทำ แต่จะศึกษาว่าวัตถุหรืออนุภาคนั้นเคลื่อนที่ได้อย่างไร โดยพิจารณาองค์ประกอบของการเคลื่อนที่ เช่น การกระจัด ความเร็วและความเร่ง ทั้งในกรณีของการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงและการเคลื่อนที่แบบวงกลมโดยใช้ระบบพิกัดฉาก (x, y, z) เป็นกรอบอ้างอิง

1. องค์ประกอบของการเคลื่อนที่


1.1 ระยะทางและการกระจัด

ระยะทาง (Distance) หมายถึงระยะจากจุดเริ่มต้นจนถึงจุดสุดท้ายของการเคลื่อนที่ของวัตถุตามเส้นทางการเคลื่อนที่นั้นๆ โดยเส้นทางการเคลื่อนที่อาจจะเป็นเส้นตรงหรือเป็นทางโค้งก็ได้ เนื่องจากระยะทางมีทิศทางไม่แน่นอนจึงจัดให้เป็นปริมาณสเกลาร์ มีหน่วยเป็นเมตร (m) แทนด้วย r


การกระจัด (Displacement) หมายถึงปริมาณการเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มต้นไปสู่ตำแหน่งสุดท้ายในแนวเส้นตรง โดยมีทิศทางตามทิศทางการเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุนั้น เนื่องจากการกระจัดเป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง การกระจัดจึงเป็นปริมาณเวกเตอร์ มีหน่วยเป็น m แทนด้วย \vec{r}



รูปที่ 2.1 แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุจาก A ไป B

จากรูป ระยะที่วัตถุเคลื่อนที่จาก A ไปยัง B ตามเส้นทางที่  เป็นการกระจัดจากจุด A ไปยังจุด B



ระยะที่วัตถุเคลื่อนที่จาก A ไปยัง B ตามเส้นทางที่  เป็นระยะทางจากจุด A ไปยังจุด B

1.2 อัตราเร็วและความเร็ว

อัตราเร็ว (Speed) ของอนุภาคหรือวัตถุใด ๆ แทนด้วยสัญลักษณ์ v หมายถึง อัตราส่วนระหว่างระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ในช่วงเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ โดยในช่วงเวลาหนึ่งอัตราเร็วอาจจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงก็ได้ จึงแทนด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย จะได้

$$v_{av} = \frac{r}{t} \quad (1)$$

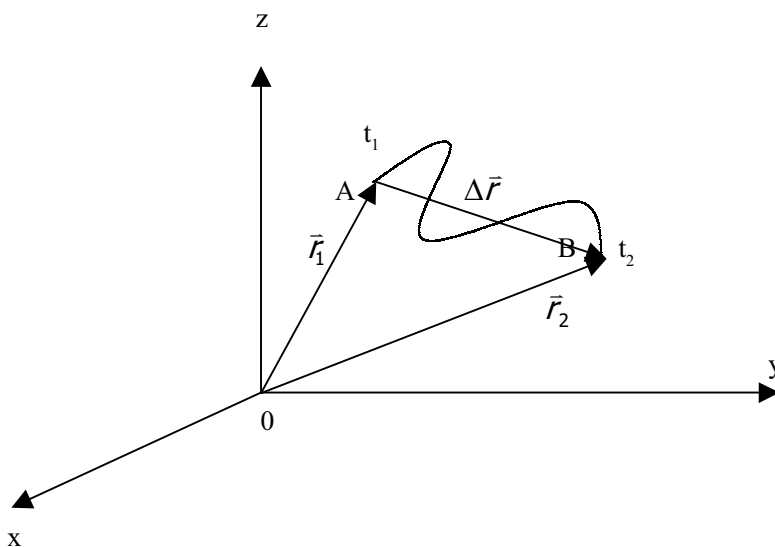
โดย v_{av} แทน อัตราเร็วเฉลี่ย มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที (m/s)

r แทน ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ มีหน่วยเป็น เมตร (m)

t แทน ช่วงเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่ มีหน่วยเป็นวินาที (s)

ความเร็ว (Velocity) ของอนุภาคหรือวัตถุใด ๆ แทนด้วยสัญลักษณ์ \vec{v} หมายถึง อัตราส่วนระหว่างระยะกระจัดที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้กับในช่วงเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที แบ่งเป็น

1.2.1 ความเร็วเฉลี่ย (average velocity, \vec{v}_{av}) คือ การกระจัดที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ กำหนดให้วัตถุเริ่มต้นอยู่ที่จุด A ในขณะเป็นเวลาเป็น t_1 เวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคเป็น \vec{r}_1 โดยเป็นเวกเตอร์ตำแหน่งที่ลากจากจุด O ไปยังจุด A เมื่อเวลาผ่านไปเป็น t_2 วัตถุเคลื่อนที่ไปยังจุด B โดยมีเวกเตอร์ตำแหน่งเป็น \vec{r}_2 ดังรูป คำนวณหาค่าความเร็วเฉลี่ยได้โดย



รูปที่ 2.2 แสดงการกระจัดของวัตถุจากจุด A ไปยังจุด B

$$\vec{V}_{av} = \frac{\text{การกระจัดทั้งหมดที่วัตถุเคลื่อนที่}}{\text{ช่วงเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่}}$$



ช่วงเวลาที่ใช้วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่

$$\bar{v}_{av} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \quad (2)$$

โดย $\Delta \bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ คือการขจัดที่วัตถุเคลื่อนที่จาก A ไป B มีหน่วยเป็น m
 $\Delta t = t_2 - t_1$ คือช่วงเวลาที่ใช้วัตถุเคลื่อนที่จาก A ไป B มีหน่วยเป็น s

ความเร็วตามสมการที่ 2 เป็นความเร็วเฉลี่ย เพราะการวัดระยะทางการเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาคจาก A ไป B เป็นการวัดระยะกระจัดในแนวเส้นตรง แต่ในความเป็นจริงวัตถุหรืออนุภาคอาจจะเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งก็ได้ และความเร็วอาจจะสม่ำเสมอหรือไม่สม่ำเสมอก็ได้ ดังนั้นในการหาค่าความเร็วเฉลี่ยจะต้องหาจากการกระจัดกับเวลาทั้งหมด โดยความเร็วเฉลี่ยที่ได้นี้เป็นปริมาณเวกเตอร์ มีหน่วยเป็น m/s โดยมีทิศทางเดียวกับการกระจัดที่วัตถุหรืออนุภาคเคลื่อนที่

1.2.2 ความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous velocity) คือ ความเร็วเฉลี่ยที่พิจารณาในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งเท่านั้น โดยช่วงเวลาของการพิจารณาความเร็วนี้มีค่าน้อยมาก ($\Delta t \rightarrow 0$) หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็นความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้น ๆ ($\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_{av}$) โดยปกติจะเรียกความเร็วขณะใดขณะหนึ่งว่า ความเร็ว โดยถ้า \bar{v} แทนความเร็ว จะได้

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_{av} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

ในทางคณิตศาสตร์ การหาลิมิตของ $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ เมื่อ $\Delta t \rightarrow 0$ คือการหาอนุพันธ์ของการกระจัดเทียบกับเวลาแทนด้วย $\frac{d\bar{r}}{dt}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad (3)$$

องค์ประกอบของการกระจัดและความเร็วของวัตถุใน 3 มิติ

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ใน 3 มิติ (ตามแกน x , y , z) จากความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ตำแหน่งสามารถคำนวณหาการกระจัดและความเร็วของอนุภาคหรือวัตถุได้ดังนี้ ถ้า $\Delta \bar{r}$ แทนการกระจัดของวัตถุตามแกน (x , y , z) จะได้ว่า

$$\Delta \bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$$

ถ้า $\bar{r}_2 = r_{x2}\hat{i} + r_{y2}\hat{j} + r_{z2}\hat{k}$; $\bar{r}_1 = r_{x1}\hat{i} + r_{y1}\hat{j} + r_{z1}\hat{k}$ จะได้



$$\begin{aligned}
\Delta \vec{r} &= (r_{x2}\hat{i} + r_{y2}\hat{j} + r_{z2}\hat{k}) - (r_{x1}\hat{i} + r_{y1}\hat{j} + r_{z1}\hat{k}) \\
&= (r_{x2} - r_{x1})\hat{i} + (r_{y2} - r_{y1})\hat{j} + (r_{z2} - r_{z1})\hat{k} \\
\Delta \vec{r} &= r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k} \quad (4)
\end{aligned}$$

โดยขนาดของ $\Delta \vec{r}$ แทนด้วย r คำนวณได้ดังนี้

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \quad (5)$$

ทิศทางของการกระจัดของวัตถุ คำนวณได้จากโคไซน์บอกทิศทาง โดย

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{r_x}{r}, \quad \theta_y = \cos^{-1} \frac{r_y}{r}, \quad \theta_z = \cos^{-1} \frac{r_z}{r} \quad (6)$$

คำนวณหาค่าความเร็วของวัตถุได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt} (r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}) \\
&= \frac{dr_x}{dt}\hat{i} + \frac{dr_y}{dt}\hat{j} + \frac{dr_z}{dt}\hat{k} \\
\vec{v} &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \quad (7)
\end{aligned}$$

สมการที่ (7) แทนองค์ประกอบของความเร็วใน 3 มิติ โดยขนาดของ \vec{v} แทนด้วย v คำนวณได้ดังนี้

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (8)$$

ทิศทางของความเร็วของวัตถุ ที่ทำกับแกน x, y, z คำนวณได้จาก

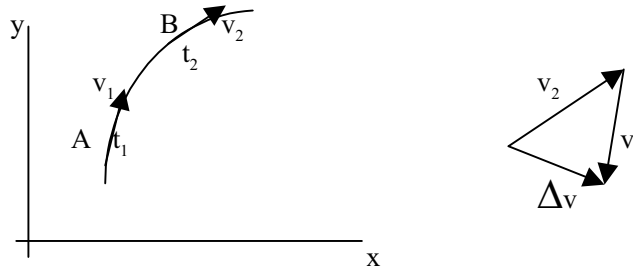
$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{v_x}{v}, \quad \theta_y = \cos^{-1} \frac{v_y}{v}, \quad \theta_z = \cos^{-1} \frac{v_z}{v} \quad (9)$$

1.3 ความเร่ง (acceleration)

ความเร็วในการเคลื่อนที่ของวัตถุหรืออนุภาคเป็นปริมาณเวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยขนาดและทิศทาง การเปลี่ยนแปลงความเร็วอาจจะเปลี่ยนเฉพาะขนาดหรือทิศทางหรืออาจจะเปลี่ยนทั้งขนาดและทิศทางพร้อม ๆ กัน การเคลื่อนที่ที่ที่ความเร็วเปลี่ยนแปลงนี้ เรียกว่ามีการเกิดความเร่งขึ้น ดังนั้นความเร่งของวัตถุหรืออนุภาคคือการเปลี่ยนแปลงความเร็วของวัตถุเทียบกับเวลา เป็นปริมาณเวกเตอร์แทนด้วยสัญลักษณ์ \vec{a} มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที² (m/s²) แบ่งเป็น



1.3.1 ความเร่งเฉลี่ย (average acceleration , \bar{a}_{av}) คือความเร็วของวัตถุหรืออนุภาคที่เปลี่ยนไปเทียบกับช่วงเวลาที่เปลี่ยนไปในการเคลื่อนที่ จากรูปที่ 2.3 อนุภาคหนึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปตามระนาบ x, y โดยที่เวลา t_1 วัตถุอยู่ที่จุด A และมีความเร็ว v_1 เมื่อเวลาผ่านไปเป็น t_2 วัตถุอยู่ที่จุด B และมีความเร็ว v_2



รูปที่ 2.3 วัตถุเคลื่อนที่บนระนาบ x, y โดยที่จุด A มีความเร็ว v_1 และที่จุด B มีความเร็ว v_2 และรูปสามเหลี่ยมแสดงการเปลี่ยนแปลงความเร็ว $\Delta v = v_2 - v_1$

ดังนั้นความเร่งเฉลี่ยของวัตถุในการเคลื่อนที่จากจุด A ไปยัง B คำนวณได้ดังนี้

$$\bar{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \quad (10)$$

โดย $\Delta \vec{v}$ แทนความเร็วของวัตถุที่เปลี่ยนไป มีหน่วยเป็น m/s

Δt แทนช่วงเวลาที่เปลี่ยนไปในการเคลื่อนที่ของวัตถุ มีหน่วยเป็น s

1.3.2 ความเร่งขณะใดขณะหนึ่ง (instantaneous acceleration) คือความเร่งเฉลี่ยของวัตถุที่พิจารณาในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งเท่านั้น โดยช่วงเวลาที่พิจารณามีค่าน้อยมาก ($\Delta t \rightarrow 0$) ซึ่งเป็นการพิจารณาความเร็วของวัตถุที่จุดใดจุดหนึ่ง บางทีเรียกความเร่งขณะใดขณะหนึ่งว่า ความเร่งแทนด้วย \bar{a} ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_{av} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \\ \bar{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \end{aligned} \quad (11)$$

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ใน 3 มิติ จะได้ความเร่งของวัตถุเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \\ &= \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} \end{aligned}$$



$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad (12)$$

สมการที่ (12) แทนองค์ประกอบของความเร่งใน 3 มิติ โดยขนาดของ \vec{a} แทนด้วย a จำนวนได้ดังนี้

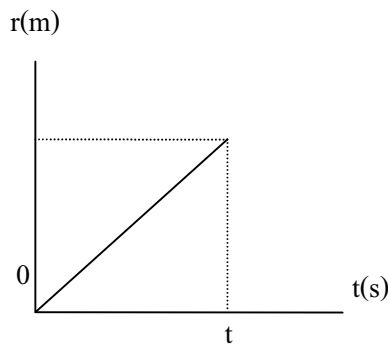
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (13)$$

ทิศทางของความเร่งของวัตถุ จำนวนได้จาก

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{a_x}{a}, \quad \theta_y = \cos^{-1} \frac{a_y}{a}, \quad \theta_z = \cos^{-1} \frac{a_z}{a} \quad (14)$$

1.4 การคำนวณหาการกระจัด ความเร็วและความเร่งโดยใช้กราฟ

ในบางกรณีลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุอาจกำหนดในรูปแบบของกราฟ โดยจากกราฟที่กำหนดให้เป็นการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุใน 1 มิติ (ตาม แกน x หรือ y) การหาค่าขนาดความเร็วเฉลี่ยอาจคำนวณได้จากความชันของกราฟระหว่างการกระจัดกับเวลาได้ ดังต่อไปนี้

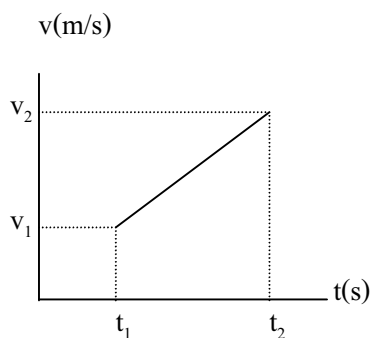


$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

ดังนั้น

$$\boxed{v_{av} = \text{Slope ของกราฟ } r \text{ กับ } t} \quad (15)$$

และหาค่าขนาดความเร่งเฉลี่ยอาจคำนวณได้จากความชันของกราฟระหว่างความเร็วกับเวลาได้ ดังต่อไปนี้



$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$$\boxed{a_{av} = \text{Slope ของกราฟ } v \text{ กับ } t} \quad (16)$$

ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่คำนวณได้จาก

$$\vec{r}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{โดย } \Delta \vec{r} = v \Delta t$$

ดังนั้นจะได้

$$\boxed{r = \text{พื้นที่ใต้กราฟระหว่าง } v \text{ กับ } t} \quad (17)$$



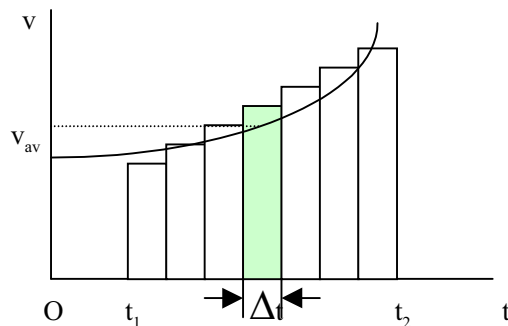
2. การเคลื่อนที่ (motion)

ในหัวข้อนี้ แบ่งการเคลื่อนที่ของวัตถุ ออกเป็น 3 กรณี คือ

- 2.1 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งไม่คงที่
- 2.2 การเคลื่อนที่ใน 1 มิติด้วยความเร่งคงที่
- 2.3 การเคลื่อนที่ใน 2 มิติ

2.1 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งไม่คงที่

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะทราบความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด ความเร็ว และความเร่งของวัตถุ ทำให้สามารถวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อความเร่งไม่คงที่ได้ดังนี้



ในขณะที่วัตถุเคลื่อนที่ความเร็วของวัตถุอาจมีค่าไม่คงที่โดยเปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังกราฟซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลา ดังนั้นในการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 ต้องแบ่งการพิจารณาออกเป็นช่วงเวลาน้อย ๆ (Δt) และคำนวณหาระยะกระจัดที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ในช่วงเวลา Δt จาก $\Delta r = v_{av} \Delta t$ ซึ่งก็คือพื้นที่ใต้กราฟส่วนที่แรเงา แต่ถ้าต้องการหาระยะกระจัดทั้งหมดที่วัตถุเคลื่อนที่จะต้องหาพื้นที่ใต้กราฟทั้งหมดในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 โดยการแบ่งให้ช่วงเวลานั้น ๆ และบวกอย่างต่อเนื่องซึ่งก็คือการอินทิเกรตนั่นเอง ดังนั้น ถ้า $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ แทนการกระจัด ความเร็วซึ่งเป็นฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา จะได้ว่า

$$\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt \quad (18)$$

ในทำนองเดียวกันถ้าต้องการหาความเร็วของวัตถุ ในกรณีที่กำหนดความเร่งไม่คงที่โดยเปลี่ยนแปลงตามเวลา สามารถหาความเร็วได้จาก

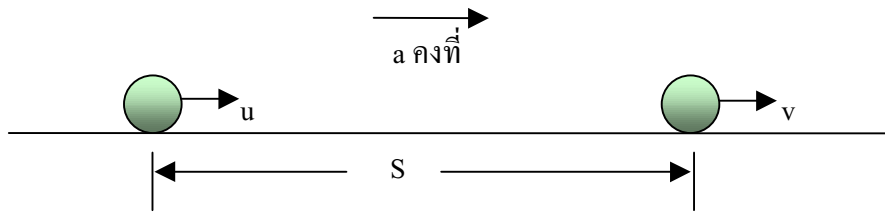
$$\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a} dt \quad (19)$$



2.2.1 มิตินี้ด้วยความเร่งคงที่

2.2.1 การเคลื่อนที่ใน 1 มิติในแนวราบด้วยความเร่งคงที่ หมายความว่าอนุภาคหรือวัตถุเคลื่อนที่ไปด้วยความเร่งที่คงที่ทั้งขนาดและทิศทางในแกน x หรือแกน y (a_x คงที่ หรือ a_y คงที่)

กำหนดให้วัตถุเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงด้วยความเร่ง a คงที่ โดยเริ่มต้นวัตถุมีความเร็ว u เมื่อเวลาผ่านไป t วัตถุมีความเร็ว v โดยเคลื่อนที่ได้ทาง S



จากสมการที่ 11
$$a = \frac{dv}{dt}$$

โดยที่เวลา $t=0$ s ความเร็วของวัตถุเป็น u และที่เวลา $t=t$ s ความเร็วของวัตถุเปลี่ยนเป็น v และความเร่งของวัตถุมีค่าคงที่เท่ากับ a จะได้

$$\int_u^v dv = \int_0^t a dt$$

$$v - u = at$$

หรือ

$$v = u + at$$

(20)

คำนวณหาระยะขจัดที่วัตถุเคลื่อนที่ได้จากสมการที่ (3)

$$v = \frac{dr}{dt}$$

โดยที่เวลา $t=0$ s การกระจัดของวัตถุเท่ากับ 0 (วัตถุอยู่ที่จุดตั้งต้น) และที่เวลา $t=t$ s วัตถุเคลื่อนที่ได้การกระจัด S จะได้

$$\int_0^S dr = \int_0^t v dt$$

จากสมการที่ (20) แทนค่า v แล้ว อินทิเกรตทั้งสองข้างจะได้

$$\int_0^S dr = \int_0^t (u + at) dt$$

$$S = ut + \frac{at^2}{2}$$



หรือ

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad (21)$$

สมการที่ 21 สามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$S = \frac{t}{2}(2u + at) = \frac{t}{2}(u + u + at)$$

จากสมการที่ (20) แทน $v = u + at$ ในสมการนี้จะได้

$$S = \frac{(u+v)t}{2} \quad (22)$$

จากสมการที่ (11) เขียนใหม่โดยใช้กฎลูกโซ่จะได้

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$$
$$a = v \frac{dv}{dx}$$

โดยการกระจัดเริ่มต้นของวัตถุเท่ากับ 0 (วัตถุอยู่ที่จุดตั้งต้น) วัตถุมีความเร็วต้น u เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ได้การกระจัด x วัตถุมีความเร็ว v

$$\int_u^v v dv = \int_0^x a dx$$

หรือ

$$v^2 = u^2 + 2as \quad (23)$$

สรุป การเคลื่อนที่ในแนวราบด้วยความเร่ง a คงที่ มีสูตรคำนวณ ดังนี้

$$v = u + at \quad \text{-(I)}$$

$$S = \left(\frac{u+v}{2}\right)t \quad \text{-(II)}$$

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{-(III)}$$

$$v^2 = u^2 + 2aS \quad \text{-(IV)}$$

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ในแนวราบด้วยความเร็วคงที่ แสดงว่า ความเร่งเป็นศูนย์ ($a = 0$) หาระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้จาก

และความเร็วที่วัตถุเคลื่อนที่

$$\left. \begin{aligned} S &= vt \\ v &= \frac{S}{t} \end{aligned} \right\} (24)$$



