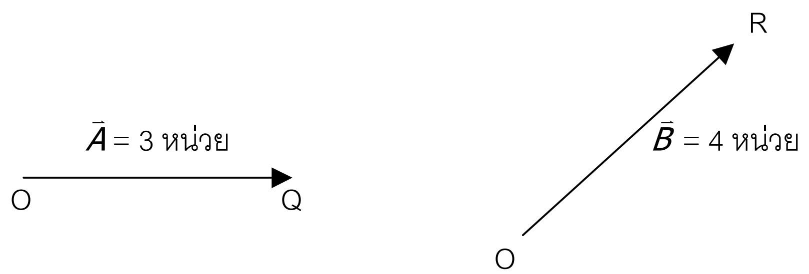
บทที่ 1
เวกเตอร์

1. สเกลาร์และเวกเตอร์ (Scalar and Vector)

ปริมาณในทางฟิสิกส์มีอยู่ 2 ปริมาณ คือ

1.1 ปริมาณสเกลาร์ เป็นปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว ได้แก่ ระยะทาง (Distant) , อัตราเร็ว (Speed) , มวล (Mass) , งานและพลังงาน (Work and Energy) เป็นต้น ดังนั้นในการคิดคำนวณเกี่ยวกับปริมาณสเกลาร์ เหมือนกับการรวมแบบพีชคณิต

1.2 ปริมาณเวกเตอร์ เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง ได้แก่ระยะกระจัด (Displacement) , ความเร็ว (Velocity) , ความเร่ง (Acceleration) , แรง (Force) เป็นต้น เขียนสัญลักษณ์ด้วยตัวอักษรและมีลูกศรกำกับอยู่ เช่น $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{P}$ หรืออาจเขียนเป็นตัวหนังสือตัวหนา เช่น **A** , **B** , **P** โดยเวกเตอร์นั้นจะเขียนแทนด้วยลูกศร ซึ่งความยาวของลูกศรแทนขนาดของเวกเตอร์ (ใช้มาตราส่วนย่อย) และหัวลูกศรแทนทิศทางของเวกเตอร์ ดังรูป



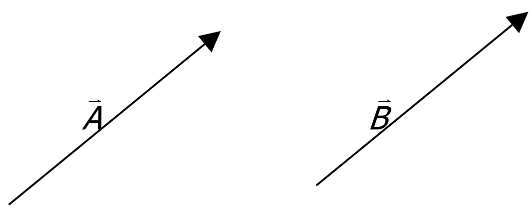
รูปที่ 1 แสดงขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$

จากรูปจะพบว่า $\vec{A}$ มีขนาดเท่ากับ 3 หน่วย ทิศทางจาก O ไป Q

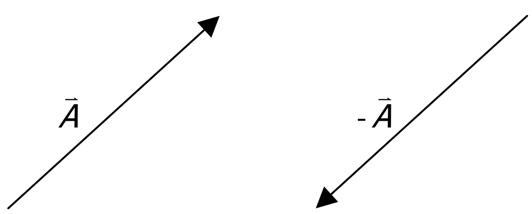
$\vec{B}$ มีขนาดเท่ากับ 4 หน่วย ทิศทางจาก O ไป R

ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ แทนด้วย $\left|\vec{A}\right| = A$

ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A} = \vec{B}$ หมายความว่า เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และชี้ในทิศทางเดียวกัน ดังรูป

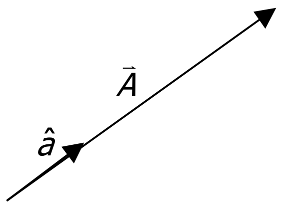


เวกเตอร์ $-\vec{A}$ หมายความว่า เวกเตอร์ $-\vec{A}$ มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ $\vec{A}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับเวกเตอร์ $\vec{A}$



2. เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย และมีทิศทางตามทิศของเวกเตอร์ที่พิจารณา เช่น $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ A และ $\hat{a}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{A}$ โดยสามารถคำนวณหา เวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้จาก



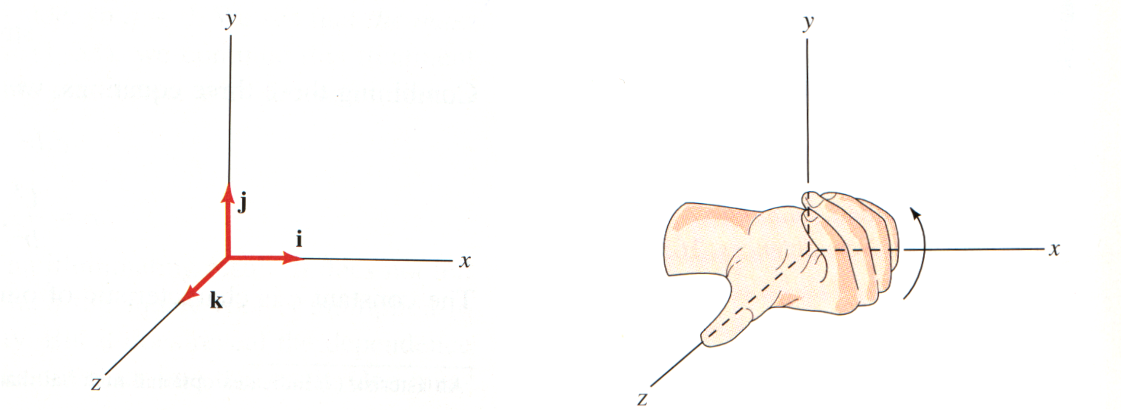
$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} \qquad (1)$$

ดังนั้นอาจเขียนได้ว่า

$$\vec{A} = A\hat{a} \qquad (2)$$

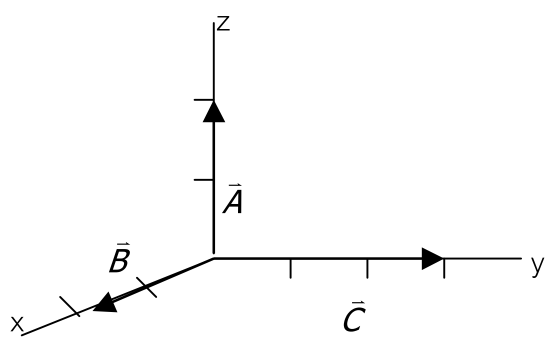
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่สำคัญ คือ $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตามแกนในระบบพิกัดฉาก คือ แกน X , Y และ Z ดังรูป โดย

1. เวกเตอร์ $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ ตั้งฉากซึ่งกันและกัน
2. เวกเตอร์ทั้งสามมีขนาดเท่ากับ 1 หน่วยและมีทิศทางคงที่
3. เวกเตอร์ทั้งสามเรียงกันตามกฎมือขวา



รูปที่ 2 แสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปที่กำหนดให้ จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$



วิธีทำ

$\vec{A} = 2\hat{k}$ หน่วย

$\vec{B} = 2\hat{i}$ หน่วย

$\vec{C} = 3\hat{j}$ หน่วย

3. การรวมเวกเตอร์

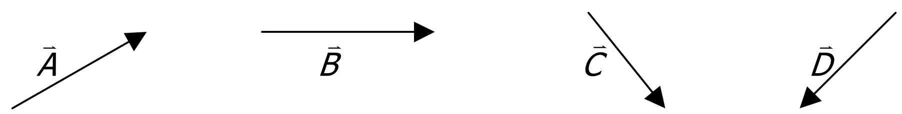
การรวมเวกเตอร์นั้นมีความแตกต่างจากการรวมแบบสเกลาร์ เนื่องจาก เมื่อขนาดหรือทิศทางของเวกเตอร์เปลี่ยนอย่างใดอย่างหนึ่ง จะทำให้เวกเตอร์นั้นเปลี่ยนไป ดังนั้นการรวมเวกเตอร์จึงต้องคำนึงถึงทิศทางของเวกเตอร์ด้วย การรวมเวกเตอร์แบ่งออกเป็น

3.1 การบวกเวกเตอร์ แบ่งได้เป็น 2 แบบ คือ

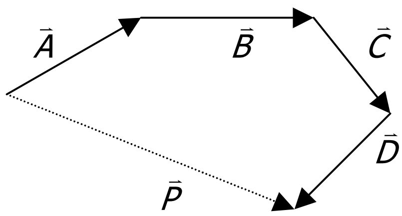
3.1.1 การเขียนรูป ทำได้โดย นำเวกเตอร์ที่ต้องการนำมาบวกกัน มาต่อกันโดยหัวลูกศรให้เรียงตามกัน **การหาผลลัพธ์ของเวกเตอร์**ทำได้โดย ให้ลากเส้นจากหางเวกเตอร์อันแรกไปยังหัวของเวกเตอร์สุดท้าย จะได้ทั้งขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์

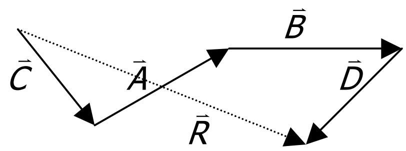
ข้อดีของวิธีการเขียนรูปคือ สะดวก รวดเร็ว แต่ข้อเสีย คือ ถ้าวัดสเกลและมุมผิดพลาด จะทำให้ผลลัพธ์ผิดพลาดได้

ตัวอย่างที่ 2 จงหาเวกเตอร์ลัพธ์ของเวกเตอร์ $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$ และ $\vec{C}+\vec{A}+\vec{B}+\vec{D}$



วิธีทำ $\vec{P} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$ $\vec{R} = \vec{C}+\vec{A}+\vec{B}+\vec{D}$





จากรูปทั้งสอง จะเห็นได้ว่า $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$ มีขนาดและทิศทางเดียวกับ $\vec{C}+\vec{A}+\vec{B}+\vec{D}$ แสดงว่าในการบวกเวกเตอร์นั้นไม่ว่าจะสลับที่เวกเตอร์ ผลที่ได้ออกมามีค่าเท่ากัน จึงอาจกล่าวได้ว่า

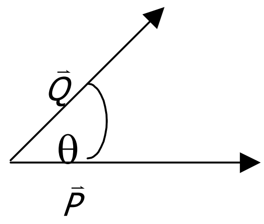
$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D} = \vec{C}+\vec{A}+\vec{B}+\vec{D}$$

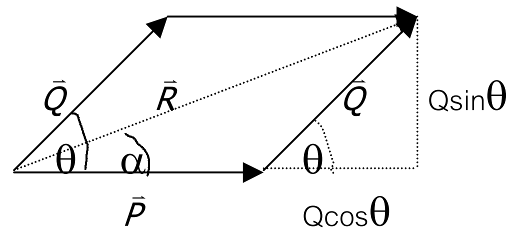
หรือ

$$\vec{P} = \vec{R}$$

3.1.2 การบวกเวกเตอร์โดยวิธีการคำนวณ

ถ้าให้ $\vec{P}$ ทำมุม θ กับ $\vec{Q}$ จงหาเวกเตอร์ $\vec{R}$ โดยที่ $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ โดยวิธีการคำนวณ





การหาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R}$ แทนด้วย R ทำได้จากกฎของโคไซน์

ขนาด $$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta} \qquad (3)$$

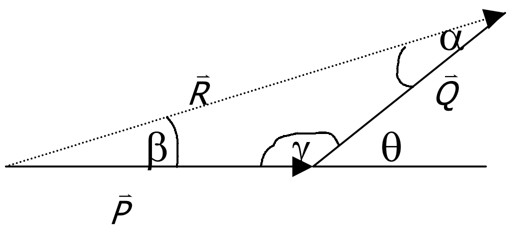
โดย θ คือมุมระหว่าง $\vec{P}$ กับ $\vec{Q}$

ทิศทางคำนวณได้จาก $$\tan\alpha = \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$$

หรือ

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}\right) \qquad (4)$$

โดย α คือมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{P}$ กับเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R}$



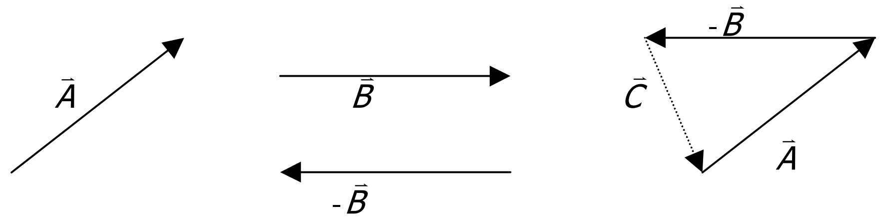
นอกจากการคำนวณหาทิศทางตามข้างต้นแล้ว อาจหาทิศทางได้จากกฎของไซน์ ดังนี้

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma} \qquad (5)$$

3.2. การลบเวกเตอร์

การลบเวกเตอร์มีวิธีการเหมือนกับการบวกเวกเตอร์ แต่ให้นำเวกเตอร์ตัวที่มาลบกลับทิศทางก่อน เช่น

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



คุณสมบัติพื้นฐานของเวกเตอร์

ถ้า $\vec{A}$, $\vec{B}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ และ m , n เป็นปริมาณสเกลาร์

1. $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$ กฎข้อนี้คือการสลับที่ของการบวก

   $\vec{A}-\vec{B} \neq \vec{B}-\vec{A}$ การลบไม่สามารถสลับที่ได้

2. $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} = \vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$ การบวกเวกเตอร์สามารถเปลี่ยนกลุ่มได้

3. $m\vec{A} = \vec{A}m$ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น m เท่าของ $\vec{A}$ แต่ทิศทางขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของ m

4. $m(\vec{A}+\vec{B}) = m\vec{A}+m\vec{B}$

5. $(m+n)\vec{A} = m\vec{A}+n\vec{A}$

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$ และขนาดของ $\vec{A},\vec{B}$ และ $\vec{C}$ มีค่า 3 N , 2 N และ $\sqrt{19}$ N ตามลำดับ จงหาขนาดของ $\vec{D}$

เนื่องจากโจทย์กำหนดขนาดของ $\vec{A},\vec{B}$ และ $\vec{C}$ มาให้ ดังนั้นในการคำนวณจึงต้องหามุมระหว่าง $\vec{A},\vec{B}$ ก่อน จึงจะทำให้รู้มุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $-\vec{B}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$

ขนาดของ $\vec{C}$ คำนวณได้จาก

$$C=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

เมื่อแทนค่าจะได้

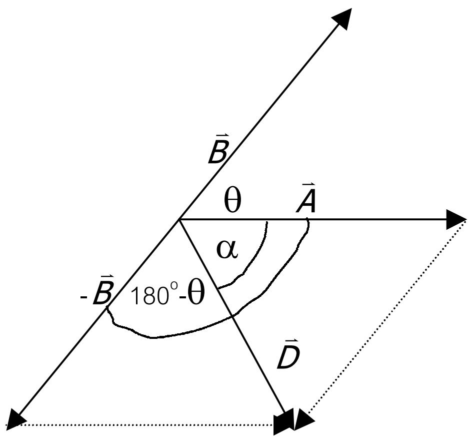
$$\sqrt{19}=\sqrt{3^2+2^2+2(3)(2)\cos\theta}$$

$$19=13+12\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$

ดังนั้นมุมระหว่าง $\vec{A},\vec{B}$ คือ

$$\theta=60^o$$



คำนวณหาขนาด $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ โดย

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(180-\theta)}$$

$$D = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2(3)(2)\cos(180-60)}$$

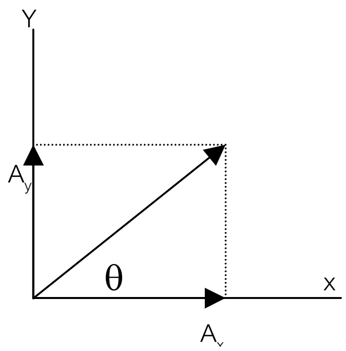
$$D = \sqrt{7} \text{ N}$$

ดังนั้นขนาดของ D มีค่าเท่ากับ $\sqrt{7}$ N

4. องค์ประกอบของเวกเตอร์ใน 2 และ 3 มิติ

4.1 องค์ประกอบของเวกเตอร์ใน 2 มิติ

ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A}$ อยู่ในระนาบ x , y ดังรูป



เวกเตอร์ $\vec{A}$ ตามแนวแกน x เรียกว่า $\vec{A}_x$

เวกเตอร์ $\vec{A}$ ตามแนวแกน y เรียกว่า $\vec{A}_y$

ขนาด $\vec{A}_x$ แทนด้วย $A_x = A\cos\theta$

ขนาด $\vec{A}_y$ แทนด้วย $A_y = A\sin\theta$

ดังนั้นอาจเขียนเวกเตอร์ $\vec{A}$ แยกเป็นองค์ประกอบใน 2 มิติ ได้ดังนี้

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

ถ้าเขียนเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย จะได้

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

หรือ

$$\vec{A} = A\cos\theta\ \hat{i} + A\sin\theta\ \hat{j} \qquad (6)$$

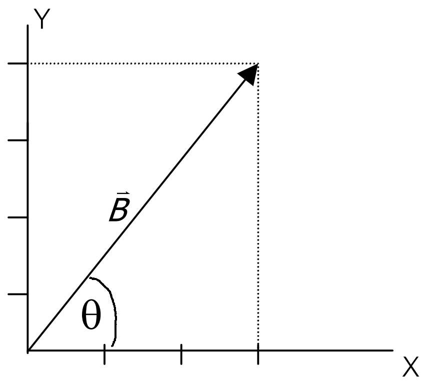
ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ คำนวณได้จาก

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (7)$$

ทิศทางของ $\vec{A}$ ที่ทำกับแกน x คำนวณได้จาก

$$\theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} \qquad (8)$$

ตัวอย่างที่ 4 เวกเตอร์ $\vec{B} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ จงหาขนาดของ $\vec{B}$ ตามแกน x และแกน y พร้อมทั้งหาขนาดและทิศทางของ $\vec{B}$



ขนาดของ $\vec{B}$ ตามแกน x : $B_x = 3$ หน่วย

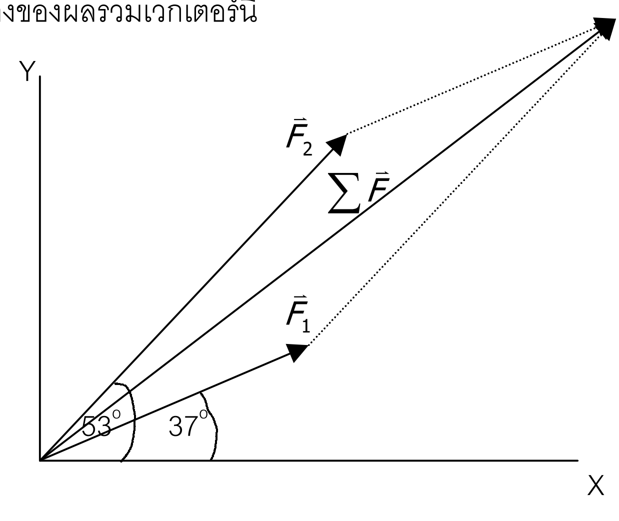
ขนาดของ $\vec{B}$ ตามแกน y : $B_y = 4$ หน่วย

ขนาดของ $\vec{B}$: $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

ทิศทาง $$\theta = \tan^{-1}\frac{B_y}{B_x} = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53^\circ$$

เวกเตอร์ $\vec{B}$ มีขนาดเท่ากับ 5 หน่วย ทิศทางทำมุม 53° กับแกน x

ตัวอย่างที่ 5 แรง F_1 และ F_2 มีขนาด 20 N , 30 N อยู่ในระนาบ X , Y และทำมุม 37° และ 53° กับแกน X จงหาขนาดและทิศทางของผลรวมเวกเตอร์นี้



$$\vec{F}_1 = F_{1x}\hat{i} + F_{1y}\hat{j}$$
$$= F_1 \cos 37^o \hat{i} + F_1 \sin 37^o \hat{j}$$
$$= 20(0.8)\hat{i} + 20(0.6)\hat{j}$$
$$\vec{F}_1 = 16\hat{i} + 12\hat{j}$$

$$\vec{F}_2 = F_{2x}\hat{i} + F_{2y}\hat{j}$$
$$= F_2 \cos 53^o \hat{i} + F_2 \sin 53^o \hat{j}$$
$$= 30(0.6)\hat{i} + 30(0.8)\hat{j}$$
$$\vec{F}_2 = 18\hat{i} + 24\hat{j}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$= (16\hat{i} + 12\hat{j}) + (18\hat{i} + 24\hat{j})$$
$$= 34\hat{i} + 36\hat{j}$$

ขนาดของ $\Sigma \vec{F}$; $\quad \Sigma F = \sqrt{(34)^2 + (36)^2} = 49.5$ N

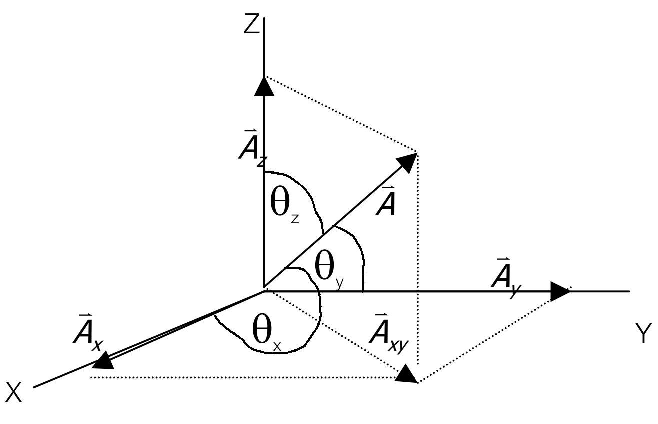
ทิศทางของ $\sum F$ $\quad \tan^{-1}\alpha = \dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{36}{34} = \dfrac{18}{17}$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{18}{17}\right)$$

ดังนั้น $\sum F$ มีขนาดเท่ากับ 49.5 N และมีทิศทางทำมุม $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{18}{17}\right)$ กับแกน X

4.2 องค์ประกอบของเวกเตอร์ใน 3 มิติ

ถ้า $\vec{A}$ อยู่บนระบบพิกัดฉาก x , y , z โดย $\vec{A}$ ทำมุมกับแกน x , y , z เป็นมุม θ_x , θ_y , θ_z , สามารถแยกองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ บนแกน x , y , z ได้ ดังนี้



จากรูปเวกเตอร์ $\vec{A}$ สามารถแยกองค์ประกอบของเวกเตอร์ตามแกน z และบนระนาบ xy ได้ ดังสมการ

$$\vec{A} = \vec{A}_{xy} + \vec{A}_z$$

แต่ $\vec{A}_{xy} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$ ดังนั้น จะได้

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z \qquad (9)$$

โดยการแยกเวกเตอร์ตามแกน x , y , z ดังนั้น

$$\left.\begin{array}{llll} \text{ขนาดของ } \vec{A}_x \text{ แทนด้วย} & A_x = A\cos\theta_x & \text{หรือ} & \cos\theta_x = \dfrac{A_x}{A} \\ \text{ขนาดของ } \vec{A}_y \text{ แทนด้วย} & A_y = A\cos\theta_y & \text{หรือ} & \cos\theta_y = \dfrac{A_y}{A} \\ \text{ขนาดของ } \vec{A}_z \text{ แทนด้วย} & A_z = A\cos\theta_z & \text{หรือ} & \cos\theta_z = \dfrac{A_z}{A} \end{array}\right\} \quad (10)$$

$\cos\theta_x , \cos\theta_y , \cos\theta_z$ ใช้บอกทิศทางของเวกเตอร์ เรียกว่า โคไซน์บอกทิศ (Direction of Cosine)

เมื่อทราบขนาดของเวกเตอร์บนแกน x , y , z แล้ว จากสมการที่ 9 สามารถเขียนองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใน 3 มิติ

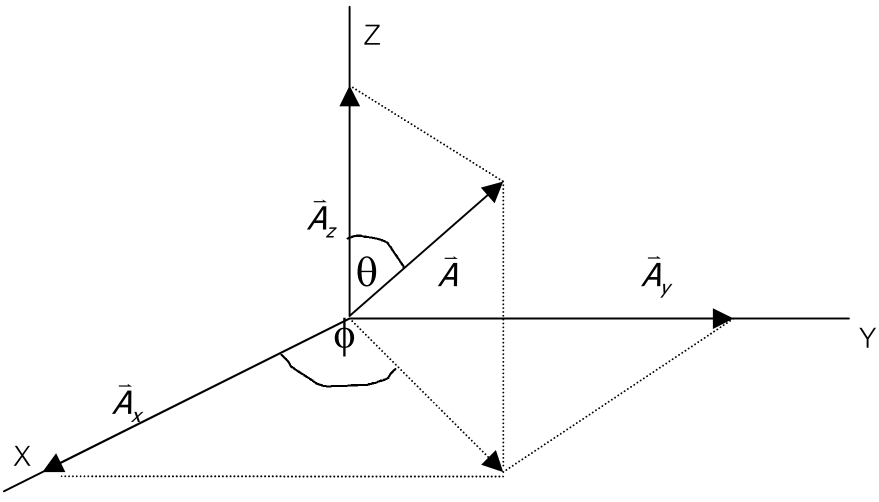
$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad (11)$$

$$\vec{A} = A\cos\theta_x\hat{i} + A\cos\theta_y\hat{j} + A\cos\theta_z\hat{k}$$

ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ แทนด้วย A คำนวณได้จาก

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (12)$$

ถ้าในกรณีที่กำหนดให้ $\vec{A}$ ทำมุม θ กับแกน z และ องค์ประกอบของ $\vec{A}$ บนระนาบ xy ทำมุม ϕ กับแกน x ดังรูป



สามารถแยกองค์ประกอบได้เช่นเดียวกับที่กล่าวไว้ข้างต้น จากสมการที่ 9

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

โดย $A_z = A\cos\theta$

$A_y = A\sin\theta\sin\phi$

$A_z = A\sin\theta\cos\phi$

ดังนั้นจะได้

$$\vec{A} = A\sin\theta\cos\phi\hat{i} + A\sin\theta\sin\phi\hat{j} + A\cos\theta\hat{k} \qquad (13)$$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$ และ $\vec{C} = -\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$ ถ้า $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$ จงหา unit vector ของ $\vec{D}$ และ โคไซน์บอกทิศทางของ $\vec{D}$

วิธีทำ จาก $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$

$$\vec{D} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}) + (3\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}) - (-\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k})$$
$$= 6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

ขนาดของ $\vec{D}$: $D = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$

ให้ $\hat{d}$ เป็น unit vector ของ $\vec{D}$ คำนวณได้จาก

$$\hat{d} = \frac{\vec{D}}{D} = \frac{6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{7} = \frac{6}{7}\hat{i} + \frac{2}{7}\hat{j} - \frac{3}{7}\hat{k}$$

หาโคไซน์บอกทิศทางของ $\vec{D}$ จาก

$$\cos\theta_x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{7}$$
$$\cos\theta_y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{7}$$
$$\cos\theta_z = \frac{D_z}{D} = \frac{-3}{7}$$

ดังนั้นจะได้ $\hat{d} = \frac{6}{7}\hat{i} + \frac{2}{7}\hat{j} - \frac{3}{7}\hat{k}$ และ $\cos\theta_x = \frac{6}{7}$, $\cos\theta_y = \frac{2}{7}$, $\cos\theta_z = \frac{-3}{7}$

ตัวอย่างที่ 7 ถ้าให้ $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ mm. และ $\vec{B} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ ถ้า $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ จงหาขนาดของ $\vec{C}$ และ unit vector ของ $\vec{C}$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์กำหนด $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ ดังนั้นจะได้

$$\vec{C} = -(\vec{A} + \vec{B})$$
$$= -\{(2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) + (-\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k})\}$$
$$= -\hat{i} + 5\hat{j} - 12\hat{k} \text{ mm.}$$

ขนาดของ $\vec{C}$: $C = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{170} = 13.04$

ถ้า $\hat{c}$ แทน unit vector ของ $\vec{C}$ หาได้จาก

$$\hat{c} = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{-\hat{i} + 5\hat{j} - 12\hat{k}}{13.04}$$

ดังนั้น ขนาดของ $\vec{C}$ มีค่า 13.04 mm. โดย unit vector ของ $\vec{C}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{-\hat{i} + 5\hat{j} - 12\hat{k}}{13.04}$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ ทำกับแกน Z

<u>วิธีทำ</u> จากโคไซน์บอกทิศทาง ให้ θ_Z เป็นมุมที่เวกเตอร์ $\vec{A}$ ทำกับแกน Z

$$\cos\theta_Z = \frac{A_Z}{A}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{7}{8.60}$$

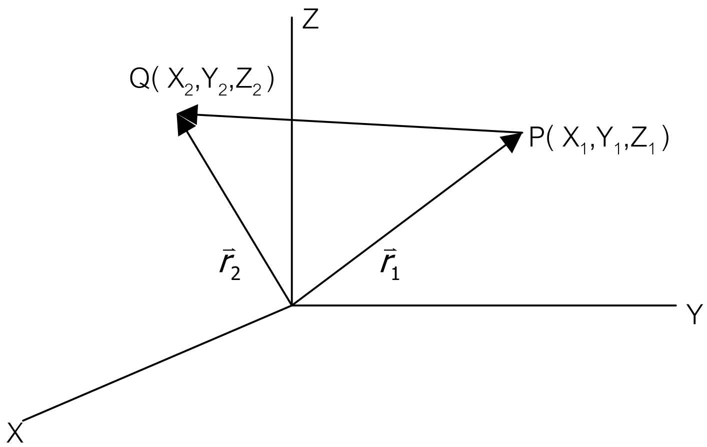
$$\theta_Z = \cos^{-1}(\frac{7}{8.60})$$

ดังนั้นมุมที่เวกเตอร์ $\vec{A}$ ทำกับแกน Z คือ θ_Z มีค่าเท่ากับ $\cos^{-1}(\frac{7}{8.60})$

5. **เวกเตอร์ตำแหน่ง** (Position Vector)

เวกเตอร์ตำแหน่ง คือ เวกเตอร์ที่บอกตำแหน่งของวัตถุเทียบกับจุดใดจุดหนึ่ง เช่น $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด P และ Q เทียบกับจุด O ในระบบแกนมุมฉาก

ถ้า จุด P อยู่ที่ตำแหน่ง (X_1,Y_1,Z_1) และ จุด Q อยู่ที่ตำแหน่ง (X_2,Y_2,Z_2) จะได้



เวกเตอร์ $\vec{r}_1 = (X_1 - 0)\hat{i} + (Y_1 - 0)\hat{j} + (Z_1 - 0)\hat{k} = X_1\hat{i} + Y_1\hat{j} + Z_1\hat{k}$

เวกเตอร์ $\vec{r}_2 = (X_2 - 0)\hat{i} + (Y_2 - 0)\hat{j} + (Z_2 - 0)\hat{k} = X_2\hat{i} + Y_2\hat{j} + Z_2\hat{k}$

จากรูปจะได้

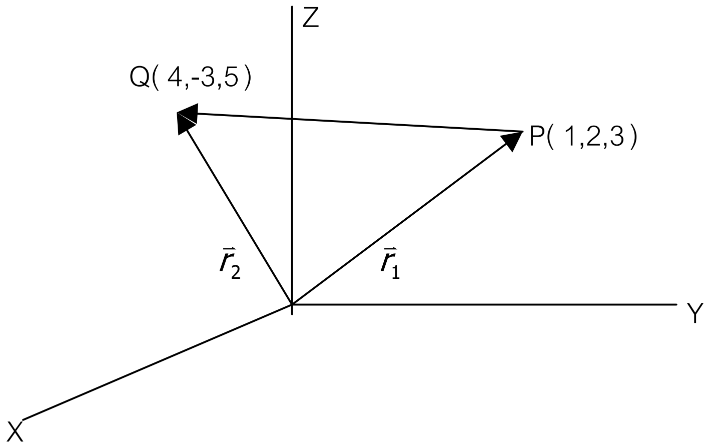
$$\vec{r}_1 + \vec{PQ} = \vec{r}_2$$

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= (X_2\hat{i} + Y_2\hat{j} + Z_2\hat{k}) - (X_1\hat{i} + Y_1\hat{j} + Z_1\hat{k}) \\ &= (X_2 - X_1)\hat{i} + (Y_2 - Y_1)\hat{j} + (Z_2 - Z_1)\hat{k} \qquad (14) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดจุด P (1,2,3) และ จุด Q (4,-3,5) จงหา

ก. ขนาดและทิศทางของ $\vec{PQ}$

ข. ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ของเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P และ Q



วิธีทำ

ก. หาขนาดและทิศทางของ $\vec{PQ}$ จากรูป จะได้

$$\vec{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

โดยที่ $\vec{r}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{r}_2 = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= (4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \\ &= (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) \end{aligned}$$

ขนาดของ $\vec{PQ}$: $|PQ| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$

ทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{PQ}$ ที่ทำกับแกน X , Y และ Z หาได้จากโคไซน์บอกทิศ

$$\theta_X = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{38}} \quad , \quad \theta_Y = \cos^{-1}\frac{-5}{\sqrt{38}} \quad , \quad \theta_Z = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{38}}$$

ข. หาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ของเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P และ Q

กำหนดให้ $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์ลัพธ์ของ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ โดยที่

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

$$= (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + (4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$$
$$= 5\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$$

ขนาดของ $\bar{r}$ $\quad r = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 8^2} = \sqrt{90}$

เวกเตอร์ลัพธ์ $\bar{r}$ ทำมุมกับกับแกน X , Y และ Z หาได้จากโคไซน์บอกทิศ โดย

$$\theta_X = \cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{90}} \quad , \quad \theta_Y = \cos^{-1}\frac{-1}{\sqrt{90}} \quad , \quad \theta_Z = \cos^{-1}\frac{8}{\sqrt{90}}$$

6. การคูณเวกเตอร์

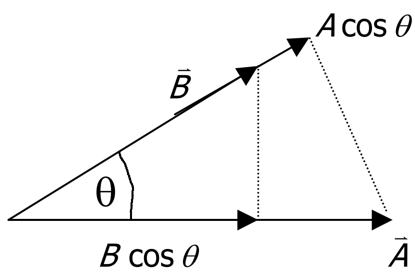
ผลคูณของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ มี 2 แบบ คือ

1. ผลคูณแบบสเกลาร์ (Scalar Product) หรือผลคูณแบบดอต (●) (Dot Product) เช่น ถ้า $\vec{A}$ คูณ $\vec{B}$ แบบดอต จะได้

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = AB\cos\theta \qquad (15)$$

โดย θ คือ มุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ โดย $0 \le \theta \le 180^o$

ผลลัพธ์จากการคูณในสมการที่ 15 เป็น**ปริมาณสเกลาร์** หรืออาจกล่าวได้ว่าผลคูณแบบนี้ ก็คือการคูณเวกเตอร์หนึ่งกับเงาของอีกเวกเตอร์หนึ่ง ดังรูป



เงาของ $\vec{B}$ บน $\vec{A}$ มีค่าเท่ากับ B cosθ

เงาของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ มีค่าเท่ากับ A cosθ

คุณสมบัติของผลคูณสเกลาร์

1. $\vec{A} \bullet \vec{B} = AB\cos\theta$
2. $\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2$
3. $\vec{A} \bullet \vec{B} = AB$ แสดงว่า $\vec{A}$ ขนานกับ $\vec{B}$ หรืออาจกล่าวได้ว่า มุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ θ = 0° ดังนั้นจะได้ $\hat{i} \bullet \hat{i}$ = $\hat{j} \bullet \hat{j}$ = $\hat{k} \bullet \hat{k}$ = 1

4. ถ้า $\vec{A}\bullet\vec{B}=0$ โดย $\vec{A}\neq 0$ และ $\vec{B}\neq 0$ แสดงว่า $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$ หรืออาจกล่าวได้ว่า มุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ $\theta = 90^{\circ}$ ดังนั้นจะได้ $\hat{i}\bullet\hat{j} = \hat{j}\bullet\hat{k} = \hat{k}\bullet\hat{i} = 0$ และ $\hat{j}\bullet\hat{i} = \hat{k}\bullet\hat{j} = \hat{i}\bullet\hat{k} = 0$
5. $\vec{A}\bullet\vec{B}=\vec{B}\bullet\vec{A}$ (กฎการสลับที่)
6. $\vec{A}\bullet(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\bullet\vec{B}+\vec{A}\bullet\vec{C}$
7. ถ้า $\vec{A}=A_X\hat{i}+A_Y\hat{j}+A_Z\hat{k}$ และ $\vec{B}=B_X\hat{i}+B_Y\hat{j}+B_Z\hat{k}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\vec{A}\bullet\vec{B} &= (A_X\hat{i}+A_Y\hat{j}+A_Z\hat{k})\bullet(B_X\hat{i}+B_Y\hat{j}+B_Z\hat{k}) \\
&= A_XB_X(\hat{i}\bullet\hat{i}) + A_XB_Y(\hat{i}\bullet\hat{j}) + A_XB_Z(\hat{i}\bullet\hat{k}) \\
&\quad + A_YB_X(\hat{j}\bullet\hat{i}) + A_YB_Y(\hat{j}\bullet\hat{j}) + A_YB_Z(\hat{j}\bullet\hat{k}) \\
&\quad + A_ZB_X(\hat{K}\bullet\hat{i}) + A_ZB_Y(\hat{k}\bullet\hat{j}) + A_ZB_Z(\hat{k}\bullet\hat{k}) \\
\vec{A}\bullet\vec{B} &= A_XB_X + A_YB_Y + A_ZB_Z
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง ถ้า $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ และ $\vec{B}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ จงหามุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ และ เงาของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$

จาก $$\vec{A}\bullet\vec{B}=AB\cos\theta$$

$$(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\bullet(3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}) = \sqrt{1^2+2^2+3^2}\ \sqrt{3^2+2^2+1^2}\ \cos\theta$$

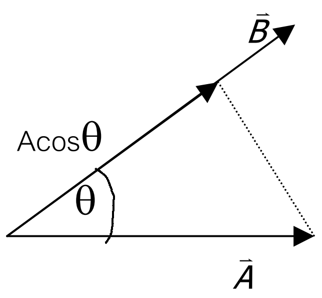
$$3+4+3 = \sqrt{14}\sqrt{14}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{5}{7}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{5}{7} = 44^{\circ}$$

มุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ คือ $\theta = \cos^{-1}\frac{5}{7} = 44^{\circ}$

คำนวณหาเงาของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$



เงาของ $\vec{A}$ บน $\vec{B}$ $= A\cos\theta$

$$= \sqrt{14}(\frac{5}{7})$$

$$= \frac{5\sqrt{14}}{7}$$

ดังนั้นเงาของ $\vec{B}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{5\sqrt{14}}{7}$

2. **ผลคูณแบบเวกเตอร์ หรือผลคูณแบบครอส** (x) (Cross Product)

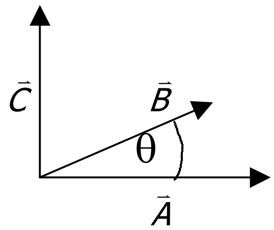
กำหนดให้ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ทำมุม θ ต่อกัน ผลคูณแบบครอสของเวกเตอร์ทั้งสอง ผลลัพธ์จะได้เวกเตอร์ที่มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ถ้า

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

ขนาดของ $\vec{C}$ แทนด้วย C จะได้

$$C = AB\sin\theta$$

ทิศทางของ $\vec{C}$ ใช้กฎมือขวา โดยหมุนจาก $\vec{A}$ ไปหา $\vec{B}$ จะได้ดังรูป



คุณสมบัติของผลคูณแบบเวกเตอร์

4. $\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta$
5. ขนาดของ $\vec{A}\times\vec{B} = AB$ แสดงว่า $\vec{A}$ ตั้งฉากกับ $\vec{B}$ หรืออาจกล่าวได้ว่า มุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ $\theta = 90^\circ$
6. ขนาดของ $\vec{A}\times\vec{B} = \mathbf{0}$ โดย $\vec{A} \neq 0$, $\vec{B} \neq 0$ แสดงว่า $\vec{A}$ ขนานกับ $\vec{B}$ หรืออาจกล่าวได้ว่า มุมระหว่าง $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คือ $\theta = 0^\circ$
7. $\vec{A}\times\vec{B} = -(\vec{B}\times\vec{A})$
8. $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B}) + (\vec{A}\times\vec{C})$
9. ถ้า $\vec{A} = A_X\hat{i} + A_Y\hat{j} + A_Z\hat{k}$ และ $\vec{B} = B_X\hat{i} + B_Y\hat{j} + B_Z\hat{k}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B} &= (A_X\hat{i} + A_Y\hat{j} + A_Z\hat{k})\times(B_X\hat{i} + B_Y\hat{j} + B_Z\hat{k}) \\
&= A_XB_X(\hat{i}\times\hat{i}) + A_XB_Y(\hat{i}\times\hat{j}) + A_XB_Z(\hat{i}\times\hat{k}) \\
&\quad + A_YB_X(\hat{j}\times\hat{i}) + A_YB_Y(\hat{j}\times\hat{j}) + A_YB_Z(\hat{j}*\hat{k}) \\
&\quad + A_ZB_X(\hat{K}\times\hat{i}) + A_ZB_Y(\hat{k}\times\hat{j}) + A_ZB_Z(\hat{k}\times\hat{k})
\end{aligned}$$

จากการหาทิศทางแบบ Cross Vector จะได้

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}\ ,\quad j\times\hat{k} = \hat{i}\ ,\quad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}\ ,$$

$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}\ ,\quad \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}\ ,\quad \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}\ ,$$

ดังนั้นจะได้ $\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{i} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{i}$

หรืออาจคำนวณได้จากการหาค่า Determinant ดังนี้

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \overleftarrow{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

3. ผลคูณเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์

เป็นการคูณเวกเตอร์ 3 เวกเตอร์ทั้งแบบ Dot product และแบบ Cross product โดยอาศัยหลักการข้างต้น การคูณจะสอดคล้องตามกฎดังนี้

1. $(\vec{A}\bullet\vec{B})\vec{C} = \vec{A}(\vec{B}\bullet\vec{C})$
2. $\vec{A}\bullet(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\bullet(\vec{A}\times\vec{C}) = \vec{C}\bullet(\vec{A}\times\vec{B})$ โดย

   $\vec{A} = A_X\hat{i} + A_Y\hat{j} + A_Z\hat{k}$, $\vec{B} = B_X\hat{i} + B_Y\hat{j} + B_Z\hat{k}$ และ $\vec{C} = C_X\hat{i} + C_Y\hat{j} + C_Z\hat{k}$

   จะได้

$$\vec{C}\bullet(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{C} = C_X\hat{i} + C_Y\hat{j} + C_Z\hat{k} \bullet \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \overleftarrow{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{C}\bullet(\vec{A}\times\vec{B}) = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

บางทีเรียกผลคูณแบบนี้ว่าผลคูณสเกลาร์แบบทริปเปิล