บทที่ 2 เวกเตอร์

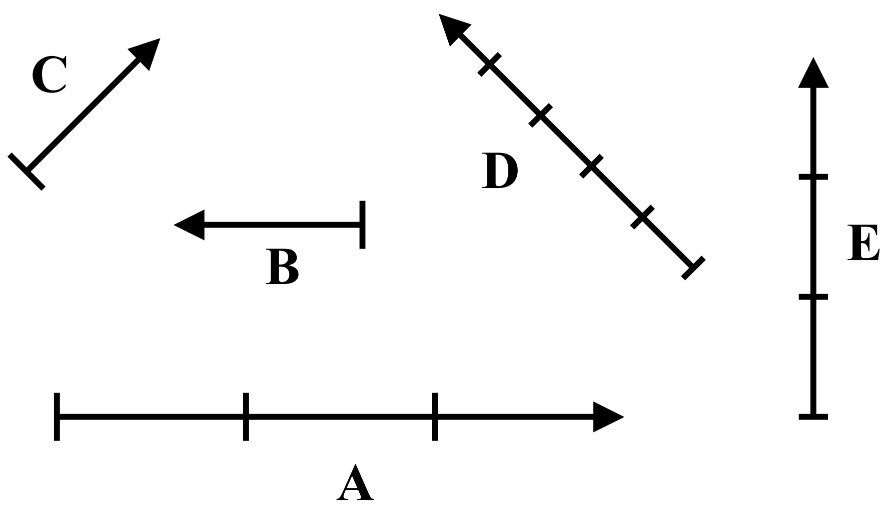
1. เวกเตอร์และสเกลาร์

สเกลาร์ คือ ปริมาณที่ระบุเฉพาะ *ขนาด* ด้วยตัวเลขเพียง 1 จำนวนและหน่วย ได้ความสมบูรณ์ เช่น มวล พลังงาน เวลา อุณหภูมิ

เวกเตอร์ คือ ปริมาณที่ระบุทั้ง *ขนาด* และ *ทิศทาง* จึงจะได้ความสมบูรณ์ เช่น การกระจัด ความเร็ว แรง

สัญลักษณ์ของเวกเตอร์ ใช้อักษรย่อของปริมาณนั้น โดยมีหลายรูปแบบแล้วแต่การนำไปใช้ หากใช้ในหนังสือจะใช้ตัวพิมพ์หนา เช่น **F,v,p** หากใช้ในตัวเขียนด้วยมือ นิยมเขียนลูกศรกำกับเหนือตัวอักษร เช่น $\vec{F},\vec{v},\vec{p}$ ซึ่งแทนด้วย แรง ความเร็ว และ โมเมนตัม ตามลำดับ

ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ เขียนแทนด้วยภาพ *ลูกศร* และ *ตัวอักษรย่อ* กำกับ ความยาวของลูกศรแสดงขนาดของเวกเตอร์



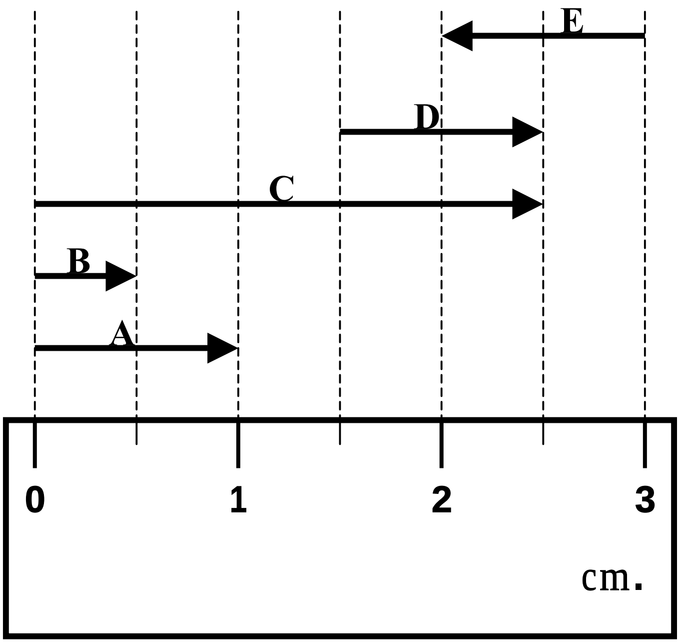
การเท่ากัน ของเวกเตอร์ จะต้องเท่ากันทั้ง*ขนาดและทิศทาง*ไปทางเดียวกัน

เวกเตอร์ที่มีเครื่องหมาย *ลบ* หมายถึง เวกเตอร์ที่มีทิศตรงข้ามกัน

ขนาด ของเวกเตอร์ นิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ค่าสัมบูรณ์กำกับตัวอักษร

เช่น $|\mathbf{A}|$ คือ ขนาดของเวกเตอร์ **A**

ตัวอย่าง กำหนด *เวกเตอร์* ดังต่อไปนี้ เปรียบเทียบขนาดกับไม้บรรทัด



$|\mathbf{A}|$ = 1.0 cm. ทิศ*ซ้ายมือ*

$|\mathbf{B}|$ = 0.5 cm. ทิศ*ซ้ายมือ*

$|\mathbf{C}|$ = 2.5 cm. ทิศ*ซ้ายมือ*

$|\mathbf{D}|$ = 1.0 cm. ทิศ*ซ้ายมือ*

$|\mathbf{E}|$ = 1.0 cm. ทิศ*ขวามือ*

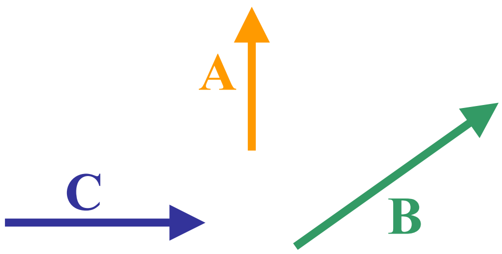
สรุปได้ว่า **A = D , E = -A= -D , A = 2B , C = 5B , 2C = 5A**

2. การบวกเวกเตอร์

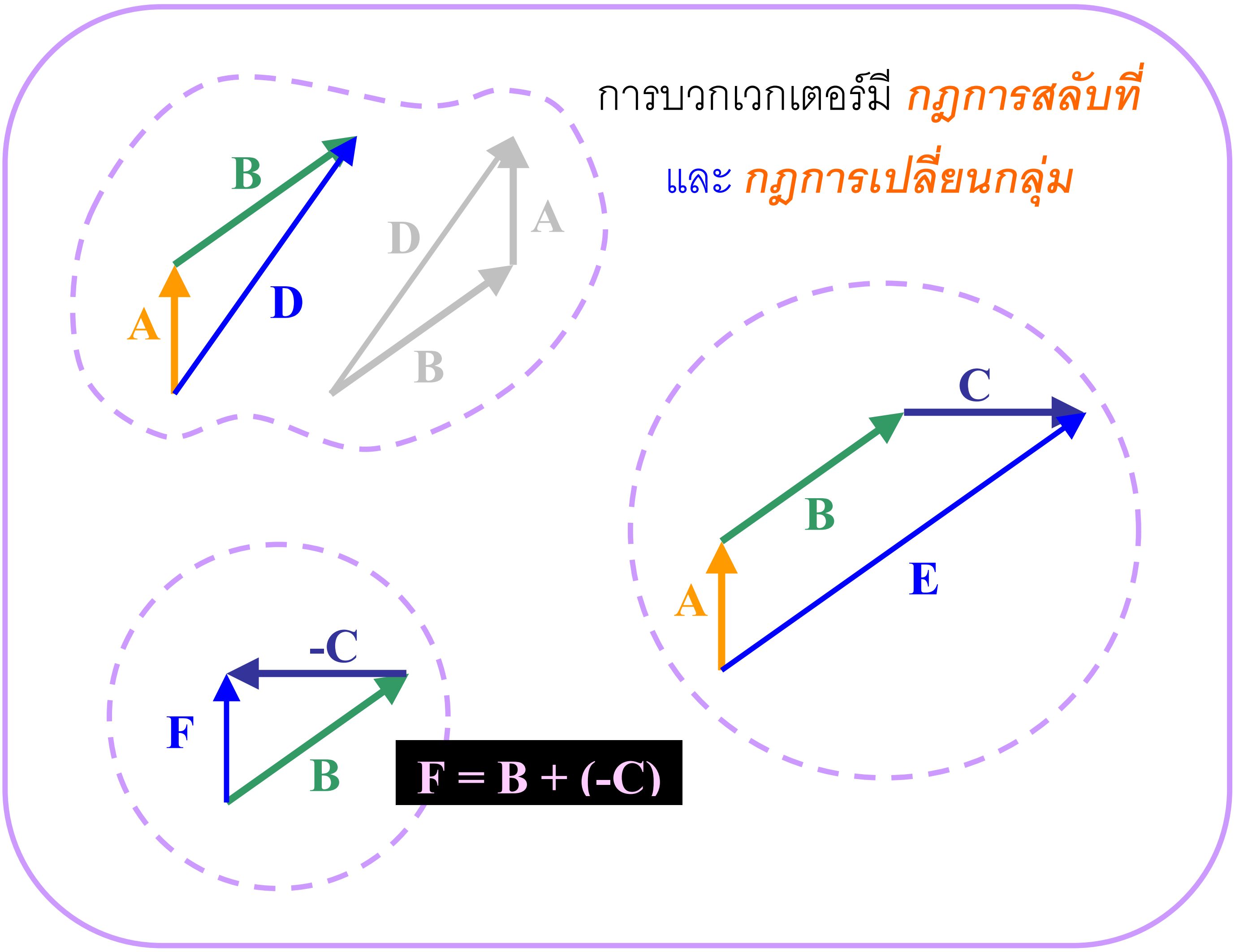
เมื่อนำ สองเวกเตอร์มาบวกกัน ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ เรียก **เวกเตอร์ลัพธ์**

❑ **โดยวิธีการเขียนรูป** โดยการเอา “**หางต่อหัว**” ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง กำหนดเวกเตอร์ **A , B** และ **C** ดังรูป จงหาเวกเตอร์ลัพธ์



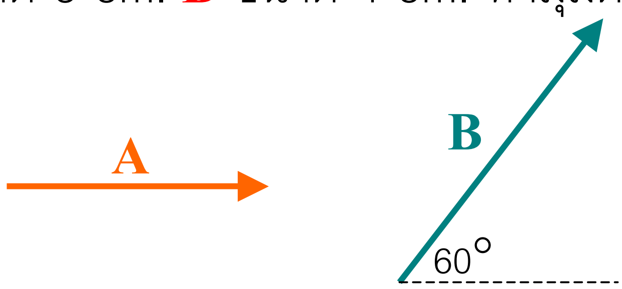
- **D = A + B**
- **E = A + B + C**
- **F = B – C**

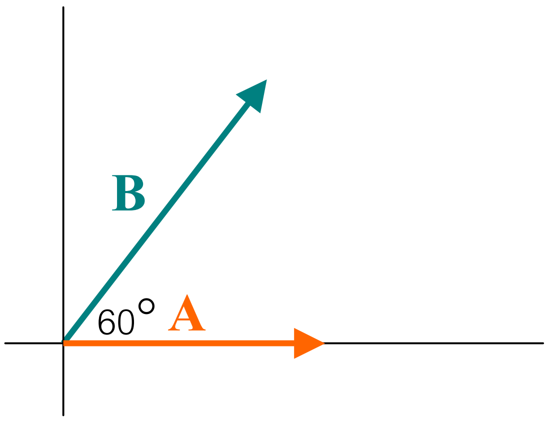


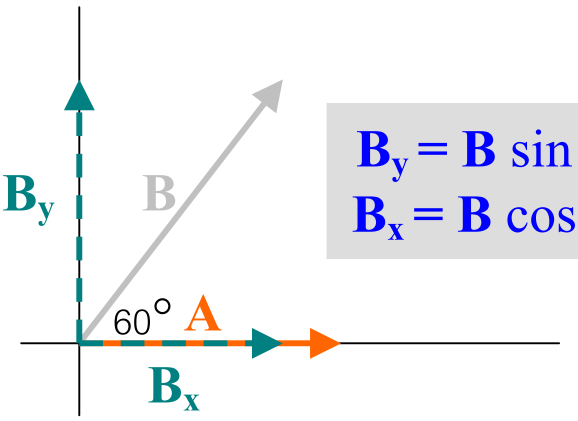
ข้อควรระวัง $|\mathbf{A}+\mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|$

❑ **โดยวิธีการคำนวณ** โดยการ **“แตกเวกเตอร์”** ลงบนพิกัดฉาก (x-y)

<u>**ตัวอย่าง**</u> กำหนดเวกเตอร์ **A** ขนาด 3 cm. **B** ขนาด 4 cm. ทำมุมดังรูป จงหาเวกเตอร์ลัพธ์ **C = A + B**







$$\mathbf{B_y} = \mathbf{B}\sin 60^\circ$$
$$\mathbf{B_x} = \mathbf{B}\cos 60^\circ$$

พิจารณา แกน x $\qquad \mathbf{C_x} = \mathbf{A} + \mathbf{B_x} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\cos 60^\circ$

พิจารณา แกน y $\qquad \mathbf{C_y} = \mathbf{B_y} = \mathbf{B}\sin 60^\circ$

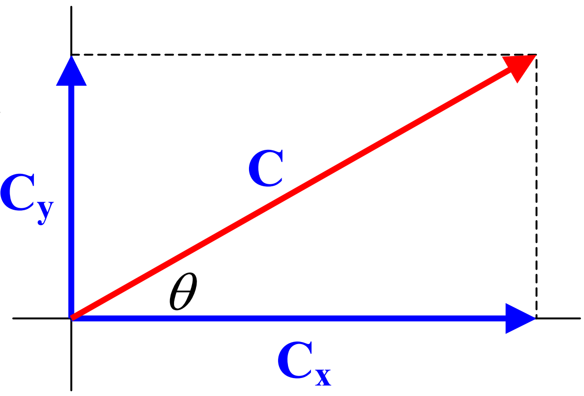
$$\mathbf{C}^2 = \mathbf{C_x}^2 + \mathbf{C_y}^2$$

$$\mathbf{C}^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\cos 60^\circ)^2 + (\mathbf{B}\sin 60^\circ)^2$$

$$\mathbf{C}^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + 2\mathbf{AB}\cos 60^\circ$$

$$\mathbf{C}^2 = 3^2 + 4^2 + 2(3)(4)(1/2) = 37$$

$$\mathbf{C} = \sqrt{37}$$

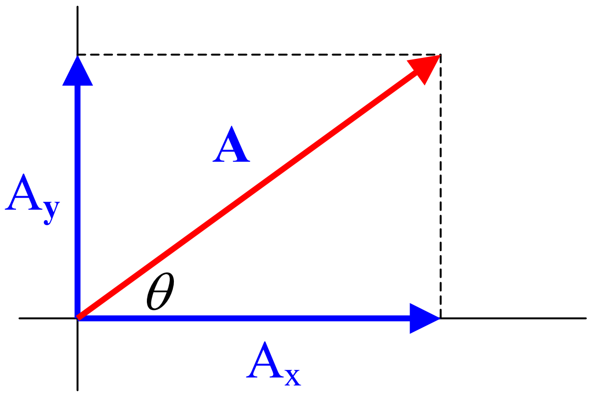


จาก $\tan\theta = \dfrac{\mathbf{C}_y}{\mathbf{C}_x}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\mathbf{C}_y}{\mathbf{C}_x} = \tan^{-1}\left[\frac{\mathbf{B}\sin 60^\circ}{\mathbf{A}+\mathbf{B}\cos 60^\circ}\right] = 34.71^\circ$$

3. ส่วนประกอบของเวกเตอร์ และ เวกเตอร์หน่วย

พิจารณา เวกเตอร์ **A** ทำมุมกับแกน x เป็นมุม θ ได้ความสัมพันธ์



$$A_y = A \sin 60°$$

$$A_x = A \cos 60°$$

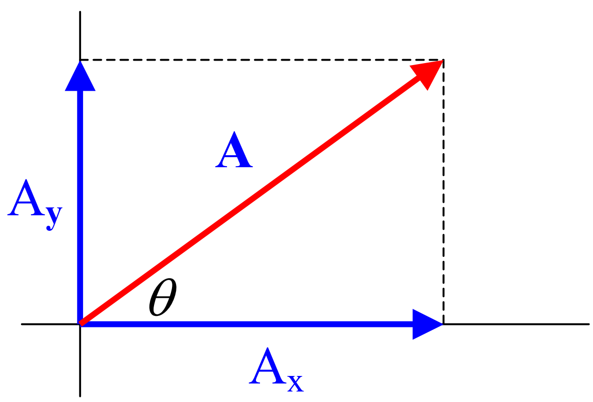
$$A^2 = A_x^{\,2} + A_y^{\,2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}$$

<u>เวกเตอร์หนึ่งหน่วย</u> ของเวกเตอร์ใดคือ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์นั้น

ถ้า $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด $|\vec{A}|$ จะได้ว่า $\hat{a}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\hat{a}$ เป็นปริมาณไม่มีมิติ ใช้บอกทิศทางเท่านั้น

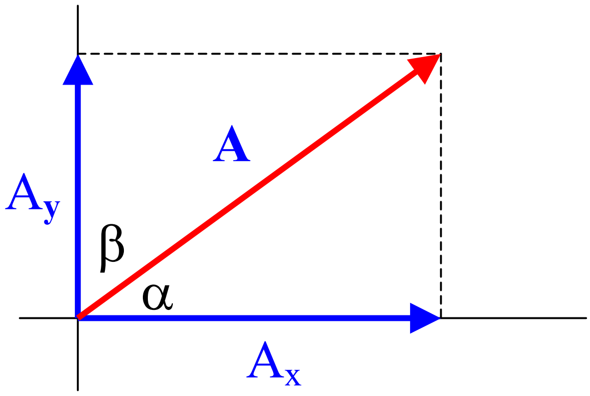
ในระบบพิกัดฉาก จะใช้เวกเตอร์ $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ แทนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x,y,z ตามลำดับ



เขียนเวกเตอร์ ได้ในรูป $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$

กำหนด $A_x = 3, A_y = 4$ จะได้ว่า $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ และ $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 5$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x} = 53°$$



ในการแสดงทิศทางของเวกเตอร์ อาจบอกในเทอมของค่าโคไซน์ของมุม กับแกนโคออดิเนตได้ว่า

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \; ; \cos\beta = \frac{A_y}{A}$$

ค่า $\cos\alpha$, $\cos\beta$ เรียกว่า ไดเรกชั่นโคไซน์ ของ A ซึ่งจะหามุมได้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา*ขนาด*และ*ทิศทาง*ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ของ $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

ขนาดของเวกเตอร์ A เท่ากับ $|\mathbf{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

สามารถเขียนเวกเตอร์หนึ่งหน่วยได้ว่า

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j}}{5} = \frac{3\hat{i}}{5} + \frac{4\hat{j}}{5}$$

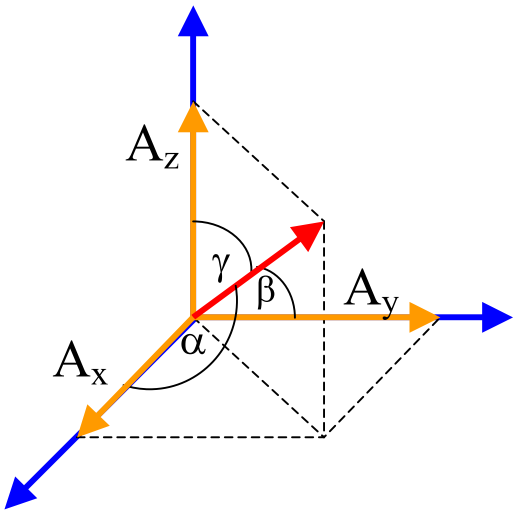
ขนาดของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $|\hat{a}| = \sqrt{\frac{3^2 + 4^2}{5}} = 1$

ทิศของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยคือ $\cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{3}{5}\; ; \cos\beta = \frac{A_y}{A} = \frac{4}{5}$

เวกเตอร์ 3 มิติ

สามารถเขียนเวกเตอร์ได้ในรูป $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

ขนาดของเวกเตอร์ เท่ากับ $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$



และมีไดเรกชั่นโคไซน์ เป็น

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}$$
$$\cos\beta = \frac{A_y}{A}$$
$$\cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

การบวกลบเวกเตอร์ 3 มิติ

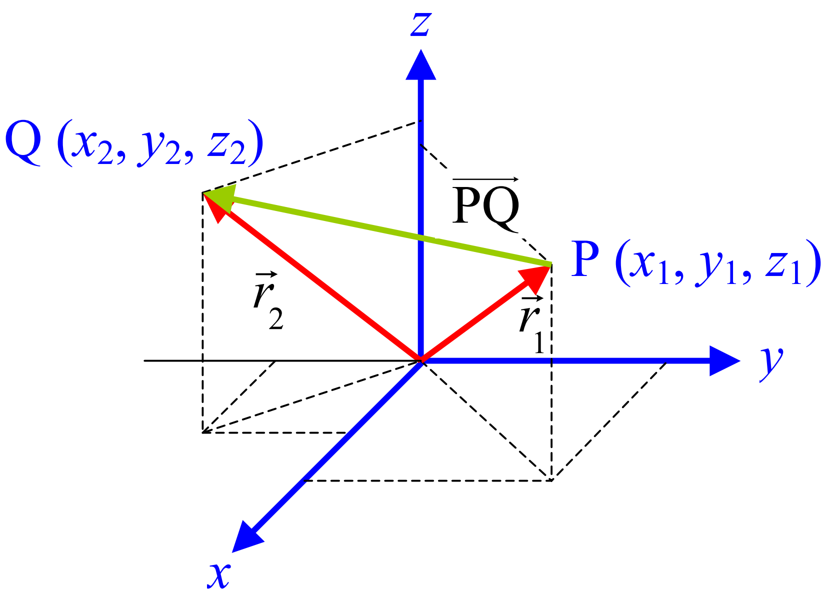
กำหนด $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ และ $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ **ผลบวก**และ**ผลต่าง**ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$
$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$

4. เวกเตอร์ตำแหน่ง

เวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุเทียบกับจุดใดจุดหนึ่ง เรียกว่า *เวกเตอร์ตำแหน่ง* (position vector) เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดเทียบกับจุดกำเนิด เรียกว่า *เวกเตอร์รัศมี* (radius vector)

กำหนด จุด P และ Q มีพิกัด x_1, y_1, z_1 และ x_2, y_2, z_2 ตามลำดับ เพราะฉะนั้นจะได้ว่า เวกเตอร์รัศมีของ จุด P และ Q คือ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ ตามลำดับ ดังรูป



จะได้ $\vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ และ $\vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$

เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ คือ เวกเตอร์ที่ลากจากจุด P ไปยัง Q ดังนั้นเป็น*เวกเตอร์ตำแหน่ง* บอกจุด Q เทียบกับจุด P

จากรูป ได้ว่า

$$\vec{r}_1 + \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_2$$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

5. การคูณเวกเตอร์

แบ่งการคูณเวกเตอร์ออกได้ 3 แบบ คือ

1. คูณเวกเตอร์ด้วยปริมาณ สเกลาร์
2. คูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์ ผลที่ได้เป็น สเกลาร์ (dot product)
3. คูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์ ผลที่ได้เป็น เวกเตอร์ (cross product)

คูณเวกเตอร์ด้วยปริมาณ สเกลาร์ กำหนด สเกลาร์ a และ เวกเตอร์ $\vec{A}$

- ❑ $a = 0$; $a\vec{A} = 0$
- ❑ $a > 0$; $a\vec{A}$ จะมีขนาดเท่ากับ $a|\vec{A}|$ และมีทิศทาง $\vec{A}$ เดิม
- ❑ $a < 0$; $a\vec{A}$ จะมีขนาดเท่ากับ $a|\vec{A}|$ และมีทิศทางตรงข้าม $\vec{A}$

กำหนด a และ b เป็นสเกลาร์ ผลคูณเวกเตอร์ด้วยปริมาณ สเกลาร์เป็นไปตามกฎดังนี้

1. $a\vec{A} = \vec{A}a$ กฎการสลับตำแหน่ง
2. $a(b\vec{A}) = (ab)\vec{A}$ กฎการจัดกลุ่ม
3. $(a+b)\vec{A} = a\vec{A} + b\vec{A}$ กฎของการกระจาย
4. $a(\vec{A}+\vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$ กฎของการกระจาย

ผลคูณสเกลาร์ (dot product) เป็นการคูณของสองเวกเตอร์ แล้วผลคูณได้สเกลาร์ โดยใช้เครื่องหมาย “ • “ อ่านว่า “*ดอท*”

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

โดยที่ θ เป็นมุมระหว่าง เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ และไม่เป็นมุมกลับ $0 \le \theta \le 180^\circ$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉาก จะมีผลคูณดังนี้

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$
$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}=0$$

กำหนด $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ และ $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ ผลคูณสเกลาร์ระหว่าง เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีค่าดังนี้

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

ผลคูณสเกลาร์เป็นไปตามกฎดังนี้

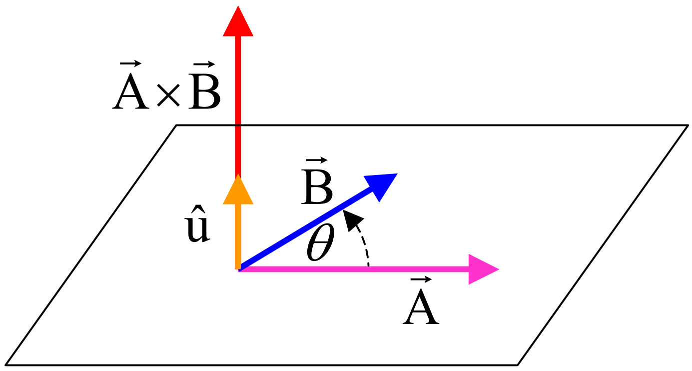
1. $\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2$
2. $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$
3. $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$
4. $(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{C}+\vec{D})=\vec{A}\cdot(\vec{C}+\vec{D})+\vec{B}\cdot(\vec{C}+\vec{D})$

   $$=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{A}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{D}$$
5. $a(\vec{A}\cdot\vec{B})=(a\vec{A})\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot(a\vec{B})$

ผลคูณเวกเตอร์ (cross product) เป็นการคูณของสองเวกเตอร์ แล้วผลคูณได้ เวกเตอร์ โดยใช้เครื่องหมาย " × " อ่านว่า "*ครอสส*"

$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\,\hat{u}$$

โดยที่ θ เป็นมุมระหว่าง เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ และไม่เป็นมุมกลับ $0\le\theta\le180°$ โดยผลที่ได้เป็นเวกเตอร์ ที่มีทิศตามทิศ $\hat{u}$ ซึ่งเวกเตอร์ลัพธ์นี้ ตั้งฉากกับสองเวกเตอร์เดิมเสมอ ดังรูป



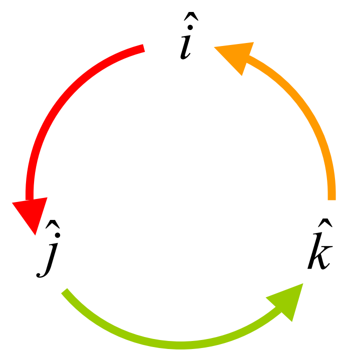
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉาก จะมีผลคูณดังนี้

$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$$

$$\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \qquad \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$$

$$\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j} \qquad \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$$



กำหนด $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ และ $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ 3 มิติ ผลคูณเวกเตอร์ระหว่าง เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีค่าดังนี้

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}-(A_xB_z-A_zB_x)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$

สามารถเขียนผลคูณเวกเตอร์ในรูปดีเทอร์มิแนนท์ ดังนี้

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

สมบัติที่สำคัญ ของผลคูณเวกเตอร์

1. ผลคูณเวกเตอร์ ของเวกเตอร์เดียวกัน จะมีค่าเป็น*เวกเตอร์ศูนย์* (เวกเตอร์ที่มีส่วนประกอบทั้งสามแกนมีค่าเป็นศูนย์) เช่น $\vec{A}\times\vec{A}=0$
2. ผลคูณเวกเตอร์ ของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ เมื่อ*สลับลำดับการคูณ* ผลลัพธ์มีขนาดเท่าเดิม แต่มีทิศตรงข้ามกับทิศเดิม เช่น $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$
3. มีสมบัติการ*แจกแจงผลคูณเวกเตอร์เหนือการบวก*

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{A}\times\vec{C})$$

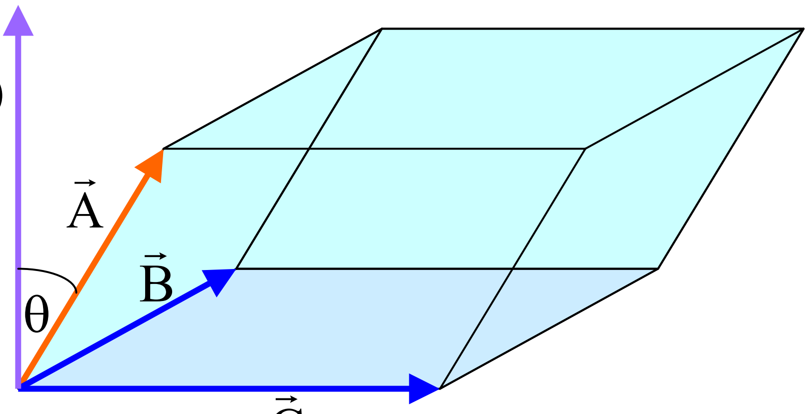
$$\begin{aligned}(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{C}+\vec{D}) &= \vec{A}\times(\vec{C}+\vec{D})+\vec{B}\times(\vec{C}+\vec{D})\\ &= (\vec{A}\times\vec{C})+(\vec{A}\times\vec{D})+(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{B}\times\vec{D})\end{aligned}$$

4. มีสมบัติการ *เปลี่ยนกลุ่มในการคูณ* ผลคูณเวกเตอร์กับปริมาณสเกลาร์

$$a(\vec{A}\times\vec{B})=(a\vec{A})\times\vec{B}=\vec{A}\times(a\vec{B})$$

6. ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น

ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น (scalar triple product) คือ ผลคูณของเวกเตอร์สามเวกเตอร์ ซึ่งเขียนในรูป $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ ให้ค่าผลคูณเป็นสเกลาร์



ขนาดของ $\vec{B}\times\vec{C}$ คือพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นด้านประกอบ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{A}$ กับ $\vec{B}\times\vec{C}$ จะได้

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(A\cos\theta)|\vec{B}\times\vec{C}|$$

จะได้ปริมาตรรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานที่มี $\vec{A}$ $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นด้าน

ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น มีสมบัติดังนี้

1. ผลคูณเชิงสเกลาร์สามชั้น มีค่าไม่เปลี่ยนเมื่อ เปลี่ยนอันดับการวนเป็นวงกลมของเวกเตอร์ $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$
2. เมื่อเขียนส่วนประกอบพิกัดฉากของเวกเตอร์เป็น

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$
$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$
$$\vec{C}=C_x\hat{i}+C_y\hat{j}+C_z\hat{k}$$

จะได้ $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$

7. แคลคูลัสของเวกเตอร์

1. การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์

กำหนด เวกเตอร์ $\vec{\mathrm{S}}$ เป็นฟังก์ชันตัวแปร t เขียนได้ในรูป

$$\vec{\mathrm{S}}(t)=S_{\mathrm{x}}(t)\hat{i}+S_{\mathrm{y}}(t)\hat{j}+S_{\mathrm{z}}(t)\hat{k}$$

เมื่อ $$\frac{d\vec{\mathrm{S}}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\mathrm{S}}(t+\Delta t)-\vec{\mathrm{S}}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d\vec{\mathrm{S}}}{dt}=\frac{dS_x}{dt}\hat{i}+\frac{dS_y}{dt}\hat{j}+\frac{dS_z}{dt}\hat{k}$$

อนุพันธ์ของเวกเตอร์ในรูปผลบวก และผลคูณแบบต่าง ๆ มีดังนี้

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathrm{A}}+\vec{\mathrm{B}})=\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{dt}+\frac{d\vec{\mathrm{B}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathrm{A}}\cdot\vec{\mathrm{B}})=\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{dt}\cdot\vec{\mathrm{B}}+\vec{\mathrm{A}}\cdot\frac{d\vec{\mathrm{B}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}})=\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{dt}\times\vec{\mathrm{B}}+\vec{\mathrm{A}}\times\frac{d\vec{\mathrm{B}}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(a\vec{\mathrm{A}})=a\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{dt}+\frac{da}{dt}\vec{\mathrm{A}}$$; เมื่อ a คือ สเกลาร์ฟังก์ชันแปรตาม t

กรณีที่เวกเตอร์เป็นฟังก์ชันของตัวแปรหลายตัว เช่น $\vec{\mathrm{A}}(x,y,z)$ สามารถนิยามอนุพันธ์ย่อยได้ดังนี้

$$\frac{\partial\vec{\mathrm{A}}}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\vec{\mathrm{A}}(x+\Delta x,y,z)-\vec{\mathrm{A}}(x)}{\Delta x}$$; อนุพันธ์เทียบกับ x (y , z คงที่)

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{A}(y+\Delta x, y, z) - \vec{A}(y)}{\Delta y}$$; อนุพันธ์เทียบกับ y (x , z คงที่)

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{A}(z+\Delta x, y, z) - \vec{A}(z)}{\Delta z}$$; อนุพันธ์เทียบกับ z (y , x คงที่)

2. การหาอินทริกรัลของเวกเตอร์

ถ้า $\vec{S} = S_x \hat{i} + S_y \hat{j} + S_z \hat{k}$ และ $\Delta\vec{S} = \vec{S}(t+\Delta t) - \vec{S}(t)$

เวกเตอร์ $\vec{S}$ เป็นฟังก์ชันของ t จะสามารถอินทริเกรตพจน์ต่อพจน์เทียบกับ t

$$\int \vec{S}(t)dt = \int S_x(t)dt\,\hat{i} + \int S_y(t)dt\,\hat{j} + \int S_z(t)dt\,\hat{k}$$

8. ตัวดำเนินการ เดล

ตัวดำเนินการ ***เดล*** (del operator) เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อย สัญลักษณ์ของตัวดำเนินการ เดล คือ $\vec{\nabla}$ มีรูปแบบดังนี้

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

1. เมื่อใช้ตัวดำเนินการเดลต่อฟังก์ชันสเกลาร์ $f(x,y,z)$ ที่ขึ้นกับตำแหน่งจะได้ค่า***เกรเดียนต์*** (gradient) ของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ เขียนเป็น $\operatorname{grad} f(x,y,z)$หรือเขียนในรูปตัวดำเนินการเดลเป็น $\vec{\nabla} f(x,y,z)$คือ

2. เมื่อใช้ตัวดำเนินการเดลต่อฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{\mathrm{V}}(x,y,z)$ ที่ขึ้นกับตำแหน่ง โดยดำเนินการแบบ ***ดอท*** จะได้ค่า **ไดเวอร์เจนซ์** (divergence) ของฟังก์ชัน $\vec{\mathrm{V}}(x,y,z)$ เขียนเป็น $\operatorname{div}\vec{\mathrm{V}}(x,y,z)$หรือเขียนในรูปตัวดำเนินการเดลเป็น $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{V}}(x,y,z)$ มีค่าเป็นสเกลาร์

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{V}}(x,y,z)=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z})\cdot(\mathrm{V}_x\hat{i}+\mathrm{V}_y\hat{j}+\mathrm{V}_z\hat{k})$$

$$=\frac{\partial \mathrm{V}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{V}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{V}_z}{\partial z}$$

$\vec{\mathrm{V}}\cdot\vec{\nabla}\neq\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{V}}$ โดยที่ $\vec{\mathrm{V}}\cdot\vec{\nabla}=V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y}+V_z\frac{\partial}{\partial z}$

3. เมื่อใช้ตัวดำเนินการเดลต่อฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{\mathrm{V}}(x,y,z)$ ที่ขึ้นกับตำแหน่ง โดยดำเนินการแบบ ***ครอส*** จะได้ค่า **เคิร์ล** (curl) ของฟังก์ชัน

$\vec{V}(x,y,z)$ เขียนเป็น $\text{curl}\,\vec{V}(x,y,z)$ หรือเขียนในรูปตัวดำเนินการเดลเป็น $\vec{\nabla}\times\vec{V}(x,y,z)$ มีค่าเป็นเวกเตอร์

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}(x,y,z)=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z})\times(V_x\hat{i}+V_y\hat{j}+V_z\hat{k})$$

$$=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

4. ผลคูณสเกลาร์ของ $\vec{\nabla}$ คือ $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ จะได้ ∇^2 เป็นตัวดำเนินการเรียกว่าตัวดำเนินการ***ลาปลาซ***หรือตัวดำเนินการลาปลาเซียน (Laplacian operator) อยู่ในรูป

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

เมื่อนำ ไปดำเนินการกับฟังก์ชันที่เป็นสเกลาร์ จะได้ผลเป็นสเกลาร์ เช่น

$$\nabla^2 f(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

เมื่อนำ ไปดำเนินการกับฟังก์ชันที่เป็นเวกเตอร์ จะได้ผลเป็นเวกเตอร์ เช่น

$$\nabla^2\vec{V}(x,y,z)=\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial z^2}$$

หนังสืออิเล็กทรอนิกส์	
ฟิสิกส์ 1(ภาคกลศาสตร์(	ฟิสิกส์ 1 (ความร้อน)
ฟิสิกส์ 2	กลศาสตร์เวกเตอร์
โลหะวิทยาฟิสิกส์	เอกสารคำสอนฟิสิกส์ 1
ฟิสิกส์ 2 (บรรยาย(	แก้ปัญหาฟิสิกส์ด้วยภาษา c
ฟิสิกส์พิศวง	สอนฟิสิกส์ผ่านทางอินเตอร์เน็ต
ทดสอบออนไลน์	วีดีโอการเรียนการสอน
หน้าแรกในอดีต	แผ่นใสการเรียนการสอน
เอกสารการสอน PDF	กิจกรรมการทดลองทางวิทยาศาสตร์
แบบฝึกหัดออนไลน์	สุดยอดสิ่งประดิษฐ์
การทดลองเสมือน	
บทความพิเศษ	ตารางธาตุ)ไทย1) 2 (Eng)
พจนานุกรมฟิสิกส์	ลับสมองกับปัญหาฟิสิกส์
ธรรมชาติมหัศจรรย์	สูตรพื้นฐานฟิสิกส์
การทดลองมหัศจรรย์	ดาราศาสตร์ราชมงคล
แบบฝึกหัดกลาง	
แบบฝึกหัดโลหะวิทยา	แบบทดสอบ
ความรู้รอบตัวทั่วไป	อะไรเอ่ย ?
ทดสอบ)เกมเศรษฐี(	คดีปริศนา
ข้อสอบเอนทรานซ์	เฉลยกลศาสตร์เวกเตอร์
คำศัพท์ประจำสัปดาห์	
ความรู้รอบตัว	
การประดิษฐ์แของโลก	ผู้ได้รับโนเบลสาขาฟิสิกส์
นักวิทยาศาสตร์เทศ	นักวิทยาศาสตร์ไทย
ดาราศาสตร์พิศวง	การทำงานของอุปกรณ์ทางฟิสิกส์
การทำงานของอุปกรณ์ต่าง ๆ	

การเรียนการสอนฟิสิกส์ 1 ผ่านทางอินเตอร์เน็ต	
1. การวัด	2. เวกเตอร์
3. การเคลื่อนที่แบบหนึ่งมิติ	4. การเคลื่อนที่บนระนาบ
5. กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน	6. การประยุกต์กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน
7. งานและพลังงาน	8. การดลและโมเมนตัม
9. การหมุน	10. สมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง
11. การเคลื่อนที่แบบคาบ	12. ความยืดหยุ่น
13. กลศาสตร์ของไหล	14. ปริมาณความร้อน และ กลไกการถ่ายโอนความร้อน
15. กฎข้อที่หนึ่งและสองของเทอร์โมไดนามิก	16. คุณสมบัติเชิงโมเลกุลของสสาร
17. คลื่น	18.การสั่น และคลื่นเสียง
การเรียนการสอนฟิสิกส์ 2 ผ่านทางอินเตอร์เน็ต	
1. ไฟฟ้าสถิต	2. สนามไฟฟ้า
3. ความกว้างของสายฟ้า	4. ตัวเก็บประจุและการต่อตัวต้านทาน
5. ศักย์ไฟฟ้า	6. กระแสไฟฟ้า
7. สนามแม่เหล็ก	8.การเหนี่ยวนำ
9. ไฟฟ้ากระแสสลับ	10. ทรานซิสเตอร์
11. สนามแม่เหล็กไฟฟ้าและเสาอากาศ	12. แสงและการมองเห็น
13. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ	14. กลศาสตร์ควอนตัม
15. โครงสร้างของอะตอม	16. นิวเคลียร์
การเรียนการสอนฟิสิกส์ทั่วไป ผ่านทางอินเตอร์เน็ต	
1. จลศาสตร์)kinematic)	2. จลพลศาสตร์ (kinetics)
3. งานและโมเมนตัม	4. ซิมเปิลฮาร์โมนิก คลื่น และเสียง
5. ของไหลกับความร้อน	6.ไฟฟ้าสถิตกับกระแสไฟฟ้า
7. แม่เหล็กไฟฟ้า	8. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับแสง
9. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ อะตอม และนิวเคลียร์	

ฟิสิกส์ราชมงคล