

บทที่ 7 โมเมนตัมและการชน

1. โมเมนตัมเชิงเส้นและการดล

ปริมาณสำคัญที่บอกการเคลื่อนที่ คือ มวลและความเร็ว จึงนิยามปริมาณ โมเมนตัมเชิงเส้น (linear momentum) โมเมนตัมของอนุภาคหนึ่งให้ \vec{p} เป็นสัญลักษณ์ นิยามให้เท่ากับ ผลคูณของมวล m กับความเร็ว \vec{v} ของอนุภาคนั้น เขียนในรูปสัญลักษณ์เป็น

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

โมเมนตัมเป็นปริมาณเวกเตอร์ มีทิศทางในทางเดียวกันกับความเร็ว มีหน่วยเป็น กิโลกรัม เมตร/วินาที (kg m/s)

เราอาจกล่าวได้ว่า โมเมนตัมคืออำนาจในการเคลื่อนที่ไปข้างหน้า หรือกล่าวได้ว่า เป็นอำนาจของการชนของวัตถุในลักษณะต่าง ๆ

จากกฎข้อที่สอง ของนิวตัน เขียนได้ว่า

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

จะเห็นได้ว่า แรงลัพธ์ที่กระทำมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมเชิงเส้น

$$\Sigma \vec{F} dt = m d\vec{v} \quad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F} dt = \int_{v_1}^{v_2} m d\vec{v}$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

ด้านซ้ายมือเป็นค่าที่เกิดจากผลคูณของแรงลัพธ์กับเวลา $\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F} dt$ เราเรียกผลคูณนี้ว่า การดล (impulse) มีหน่วยเป็นนิวตัน-วินาที ซึ่งเท่ากับด้านขวามือเป็นการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงเส้น $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F} dt$

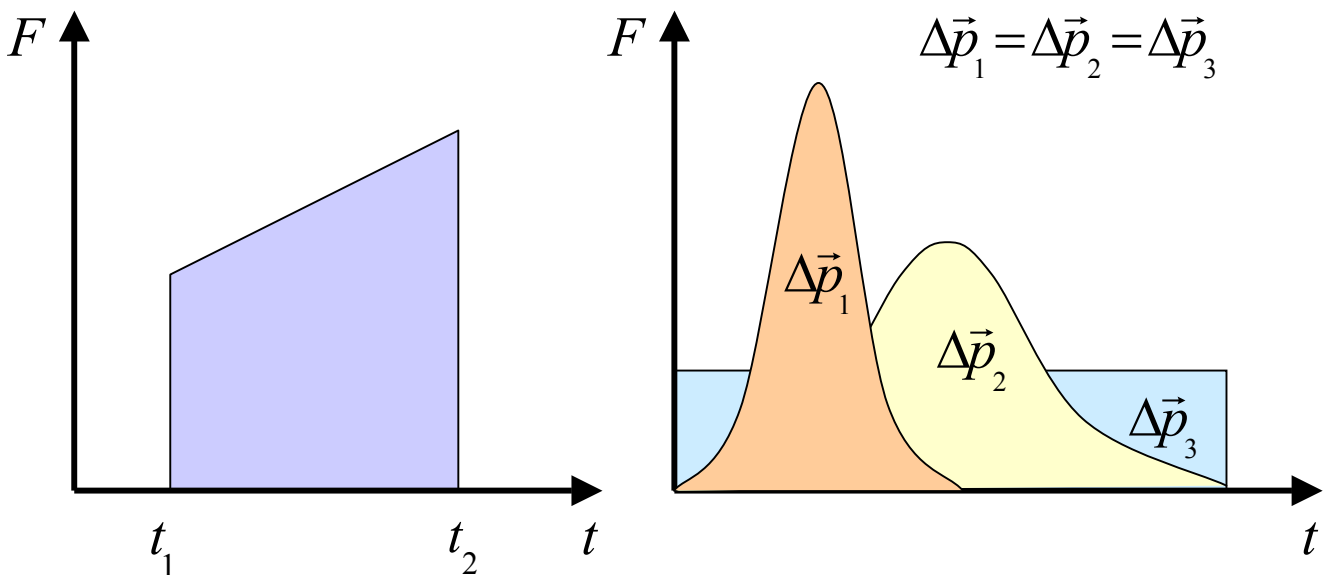
ความสัมพันธ์ตามสมการ เรียกว่า ทฤษฎีบทการดล-โมเมนตัม ซึ่งกล่าวว่า การดลของแรงที่กระทำต่อวัตถุ เท่ากับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของวัตถุ การดลเป็นปริมาณเวกเตอร์ สามารถเขียนค่าการดลในแต่ละแกน

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F}_x dt = m\vec{v}_{x2} - m\vec{v}_{x1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F}_y dt = m\vec{v}_{y2} - m\vec{v}_{y1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F}_z dt = m\vec{v}_{z2} - m\vec{v}_{z1}$$

กราฟระหว่างแรงลัพธ์ในแต่ละแกนกับเวลาที่กระทำ



พื้นที่ใต้กราฟ แสดงการดล ซึ่งเท่ากับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม

จากสมการ
$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{v_1}^{v_2} d\vec{p}$$

$$\Sigma \vec{F} dt = d\vec{p}$$

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

จะเห็นได้ว่า $\Sigma \vec{F} \propto m\vec{v}$ และ $\Sigma \vec{F} \propto \frac{1}{\Delta t}$ ดังนั้นการชนกันของวัตถุถ้ามีการเปลี่ยนแปลงความเร็วมาก หรือช่วงเวลายชนน้อย แรงจะมากตามไปด้วย

2. กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม

ถ้าอนุภาคไม่มีแรงภายนอกมากระทำ หรือแรงลัพธ์ภายนอกเป็นศูนย์

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad ; \quad \vec{p} = \text{constant}$$

กำหนดแรงลัพธ์ที่กระทำต่อระบบอนุภาคคือผลรวมของแรง ในที่นี้กำหนดให้มีสองแรงคือ \vec{F}_1 และ \vec{F}_2 ซึ่งกระทำต่ออนุภาคที่หนึ่งและที่สองตามลำดับ

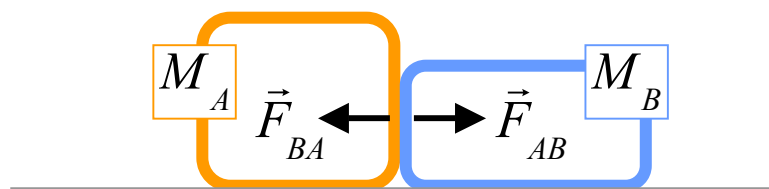
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

เมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำ หรือแรงลัพธ์ภายนอกเป็นศูนย์ เรียกว่า **ระบบโดดเดี่ยว (isolated system)**

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{constant}$$

สำหรับอนุภาค 2 อนุภาคมวล M_A และ M_B เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว \vec{u}_A และ \vec{u}_B กระทบกันแล้วทำให้เกิดแรงปฏิกิริยากัน ให้มีความเร็ว \vec{v}_A และ \vec{v}_B ตามลำดับ โดยไม่มีแรงภายนอกมากระทำ



จากกฎข้อที่สามของนิวตัน ได้ว่า

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

กฎข้อที่สองของนิวตัน เขียนต่อไปได้ว่า

$$M_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} = -M_B \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$

$$M_A \int_{u_A}^{v_A} d\vec{v}_A = -M_B \int_{u_B}^{v_B} d\vec{v}_B$$

$$M_A (\vec{v}_A - \vec{u}_A) = M_B (\vec{v}_B - \vec{u}_B)$$

จากสมการเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของวัตถุ A มีขนาดเท่ากับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของวัตถุ B แต่มีทิศทางตรงข้ามกัน อาจเขียนได้ว่า

$$M_A \vec{u}_A + M_B \vec{u}_B = M_A \vec{v}_A + M_B \vec{v}_B$$

สามารถเขียนเป็นหลักการของโมเมนตัมเชิงเส้นได้ว่า “ ถ้าแรงลัพธ์ ที่กระทำต่ออนุภาคหรือระบบของอนุภาคเป็นศูนย์ ผลรวมของโมเมนตัมของอนุภาคหรือระบบอนุภาคนั้นมีค่าคงที่เสมอ ”

เนื่องจากโมเมนตัมเป็นปริมาณเวกเตอร์ ในกรณีที่คิดเทียบกับแต่ละแกน จะเป็นการทรงโมเมนตัมเฉพาะแกน ดังนี้

$$m_1 \vec{u}_{1x} + m_2 \vec{u}_{2x} = m_1 \vec{v}_{1x} + m_2 \vec{v}_{2x}$$

$$m_1 \vec{u}_{1y} + m_2 \vec{u}_{2y} = m_1 \vec{v}_{1y} + m_2 \vec{v}_{2y}$$

$$m_1 \vec{u}_{1z} + m_2 \vec{u}_{2z} = m_1 \vec{v}_{1z} + m_2 \vec{v}_{2z}$$

3. การชนกัน (Collision)

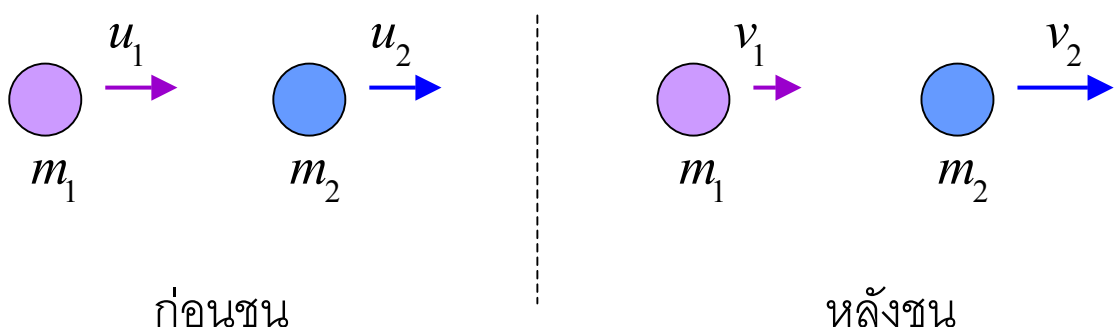
การชนสามารถแบ่งออกได้เป็นชนิดใหญ่ ได้สองชนิดคือ การชนที่ไม่มี การสูญเสียพลังงานจลน์ระหว่างการชน เรียกว่า **การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ (Completely elastic collision)**

การชนอีกชนิดหนึ่งคือ การชนที่มีการสูญเสียพลังงานจลน์ไประหว่างการชน เรียกว่า **การชนแบบไม่ยืดหยุ่น (Inelastic collision)** ยังแบ่งเป็น การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์-ติดกันไปตลอด (**Completely inelastic collision**) และการชนแบบไม่สมบูรณ์-ติดกันไปแล้วแยก

การชนของวัตถุเป็นไปตามหลักคงตัวของโมเมนตัมเสมอ ไม่ว่าจะเป็นการชนแบบใดก็ตาม การชนกันอาจสัมผัสหรือไม่ก็ได้ (กรณีอนุภาคมีประจุไฟฟ้าชนกัน) เมื่อวัตถุชนกันแล้วทำให้มีการแลกเปลี่ยนโมเมนตัมและพลังงานระหว่างกัน

3.1 การชนแบบยืดหยุ่นในหนึ่งมิติ

กำหนดให้อนุภาคมวล m_1 และ m_2 เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u_1 และ u_2 ในแนวแกน $+x$ หลังการชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ อนุภาคทั้งสองเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_1 และ v_2 ในแนวแกน $+x$ ตามลำดับ



จากหลักการคงตัวของโมเมนตัมได้ว่า

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2)$$

จากหลักคงตัวของพลังงานจลน์

$$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2)$$

จากสองสมการข้างต้น สามารถแก้สมการได้ว่า

$$u_1 + v_1 = v_2 + u_2$$

$$u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2)$$

เราอาจกำหนดลักษณะการชนจาก ค่าสัมประสิทธิ์การชน e

$$e = -\frac{(v_1 - v_2)}{u_1 - u_2}$$

เห็นได้ว่าถ้าค่า $e=1$ จะเป็นการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ ถ้าค่า $e=0$ จะเป็นการชนแบบติดกันไปซึ่งเป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์

จากสมการ $u_1 + v_1 = v_2 + u_2$ ได้ว่า $v_2 = u_1 + v_1 - u_2$ เมื่อนำไปแทนสมการ หลักการคงตัวของโมเมนตัม จะได้ความเร็ว v_1 และ v_2 ในฟังก์ชันของความเร็วของอนุภาคทั้งสองก่อนชนดังนี้

$$v_1 = \frac{2m_2 u_2 + (m_1 - m_2)u_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{2m_1 u_1 - (m_1 - m_2)u_2}{m_1 + m_2}$$

พิจารณากรณี ก่อนชน อนุภาค m_2 อยู่นิ่ง $u_2=0$ จากสมการข้างต้นจะได้ว่า ความเร็วหลังชนของอนุภาคทั้งสองลดรูปเหลือ

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 \quad ; \quad v_2 = \frac{2m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$

และถ้า $m_1 = m_2$ โดย $u_2 = 0$ จะได้ว่า หลังชนอนุภาค m_1 จะหยุดนิ่ง และ ความเร็วหลังชนของอนุภาค m_2 จะมีความเร็ว $v_2 = u_1$

ถ้าเขียนพลังงานจลน์ของอนุภาค m_1 ก่อนชนและหลังชนเป็น K_1 และ K_1' พลังงานจลน์ของอนุภาค m_2 ก่อนชนและหลังชนเป็น ศูนย์ และ K_2' สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ว่า

$$K_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 K_1$$

$$K_2' = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} K_1$$

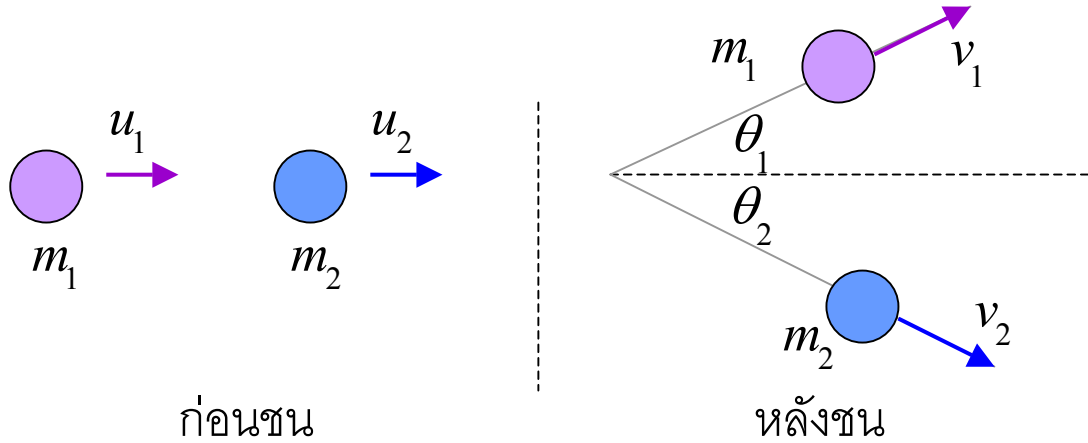
พิจารณาการสูญเสียพลังงานจลน์ของอนุภาค m_1 สูญเสียพลังงานไป เท่ากับ $K_1 - K_1' = K_2'$ และจากสมการ K_2' เป็นสัดส่วนกับ K_1 จะได้สมการ

$$\frac{K_1 - K_1'}{K_1} = \frac{K_2'}{K_1} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

เมื่อวัตถุเล็กวิ่งชนวัตถุใหญ่กว่ามาก ๆ $m_1 \ll m_2$ จากสมการข้างต้น อนุภาค m_1 จะไม่เคลื่อนที่หรือหยุดนิ่ง อนุภาค m_2 จะเคลื่อนที่ด้วยพลังงานจลน์เท่าเดิม $K_2' = 0$ และ $K_1' = K_1$

3.2 การชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ในสองมิติ

ในกรณีการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์สองมิติ อนุภาคจะแยกกัน สามารถเขียนในแต่ละแกนได้



แยกพิจารณาหลักการคงตัวโมเมนตัมออกเป็นสองแกน

แกน x ; $m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2$

แกน y ; $0 = m_1 v_1 \sin \theta_1 + (-m_2 v_2 \sin \theta_2)$

และสมการการคงตัวของพลังงานจลน์

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

ถ้า อนุภาค $m_1 = m_2$ และ $u_2 = 0$ จะเขียนเป็นกรณีพิเศษได้ว่า

$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2$$

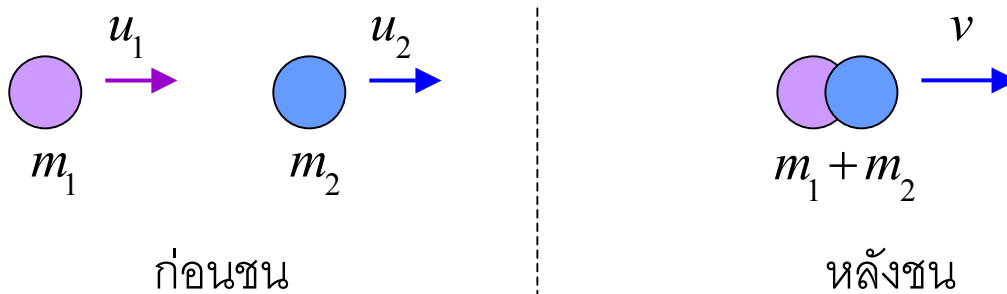
$$u_1^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

จากเงื่อนไขข้างต้น แก้สมการได้ว่า $\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$ หรือสามารถกล่าวได้ว่า ถ้ามวลอนุภาคทั้งสองเท่ากันและเป็นการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ หลังชนทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคทั้งสองทำมุมกันเท่ากับ 90°

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$

3.3 การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์

ผลหลังจากการชนของอนุภาค อนุภาคทั้งสองจะติดกันไป และจะสูญเสียพลังงานจลน์ส่วนหนึ่งไปด้วย



จากความสัมพันธ์หลักการคงตัวของโมเมนตัม

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$$

กรณี ทิศทางของการเคลื่อนที่จะอยู่แนวทางเดิม

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) v$$

พลังงานจลน์ก่อนชนเท่ากับ $\sum K_i = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$

พลังงานจลน์หลังชนเท่ากับ $\sum K_f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$

พิจารณาการสูญเสียพลังงานจลน์ของอนุภาคได้ว่า

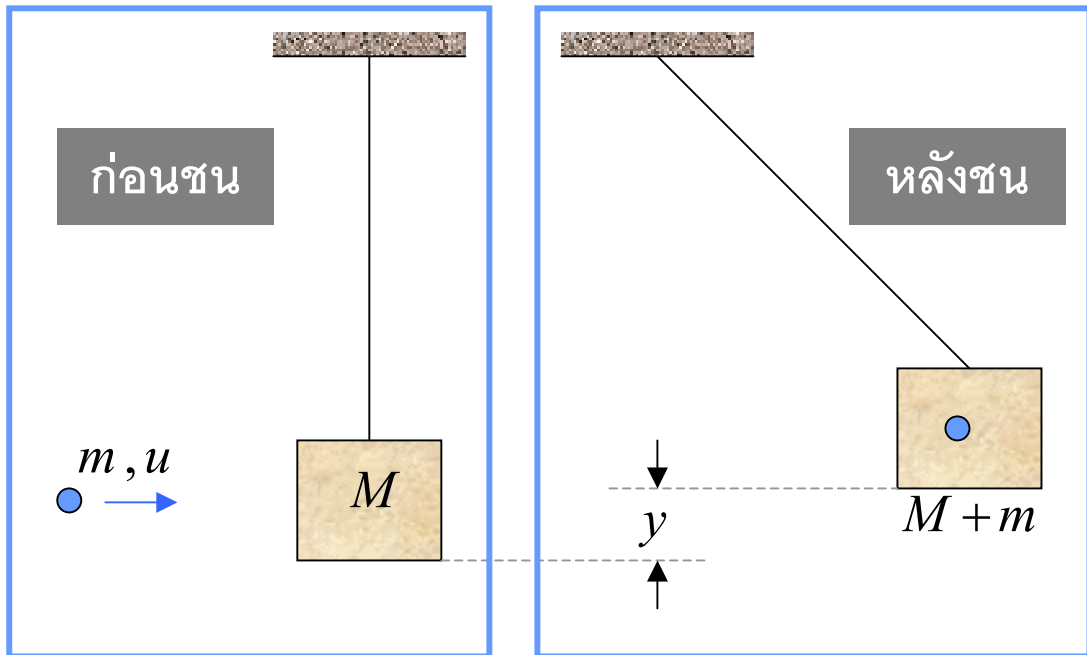
$$\frac{\sum K_f}{\sum K_i} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{m_1 u_1^2}$$

$$\frac{\sum K_f}{\sum K_i} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1 u_1^2} \times \frac{m_1^2 u_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$\frac{\sum K_f}{\sum K_i} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

สามารถสรุปได้ว่า $\sum K_f < \sum K_i$ เสมอ

4. ลูกตุ้มนาฬิกาแบบบอลลิสติก



ลูกปืนมวล m ความเร็ว u เคลื่อนที่เข้าชนแท่งวัตถุมวล M ที่แขวนเชือกไว้กับเพดาน หลังชนลูกปืนฝังเข้าเนื้อวัตถุทำให้แท่งวัตถุพร้อมลูกปืนเคลื่อนที่ขึ้นสูงขึ้นไปจากระดับเดิมเป็นระยะ y

$$mu = (m + M)v \quad ; \quad u = \frac{m + M}{m}v$$

พิจารณาหลักการการคงตัวของพลังงานกล

$$\frac{1}{2}(m + M)v^2 = (m + M)gy$$

$$v = \sqrt{2gy}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

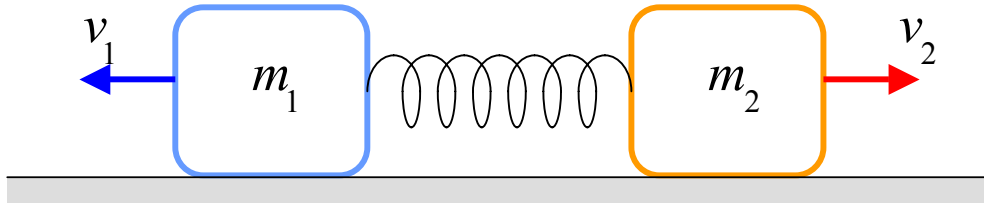
$$u = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gy}$$

พิจารณาการสูญเสียพลังงานจลน์ของอนุภาคได้ว่า

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}(m + M)v^2}{\frac{1}{2}mu^2} = \frac{m}{m + M}$$

5. การดีดตัว (Recoil)

ถ้านำวัตถุมวล m_1 และ m_2 มาอัดสปริงบนพื้นลื่นแล้วปล่อย ดังรูป



พิจารณาโมเมนตัมของระบบตามหลักการคงตัว จะได้ว่า

$$0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้นได้สมการ $\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2$

พิจารณาสัดส่วนพลังงานจลน์วัตถุมวล m_1 ต่อมวล m_2 ได้เท่ากับ

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} = \frac{m_2}{m_1}$$

พลังงานจลน์รวมของระบบดีดตัวของวัตถุนี้ เกิดจากพลังงานที่สะสมในสปริง ดังนั้นได้ความสัมพันธ์ดังสมการ

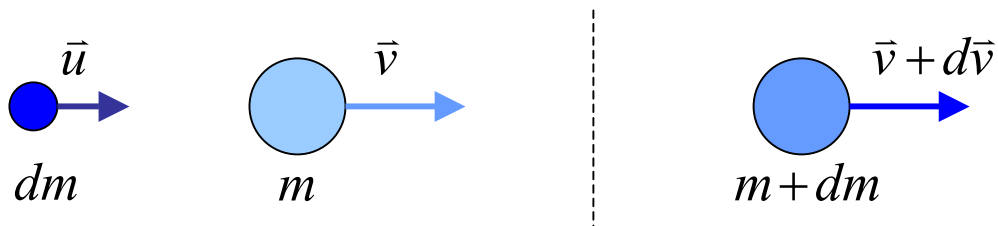
$$\Sigma K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} kx^2$$

ในการเคลื่อนที่อาจจะไม่ได้เกิดจากสปริงทำให้ดีดตัวออก และก่อนดีดตัวอาจไม่ได้หยุดนิ่ง แต่อาจมีการเคลื่อนที่ ดังนั้น สมการทั่วไปของหลักการคงตัวอาจเขียนในรูป

$$(m_1 + m_2) \vec{u} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

6. โมเมนตัมของระบบมวลที่เปลี่ยนแปลง

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล dm ความเร็ว \vec{u} รวมเข้าไปกับวัตถุ
มวล m ความเร็ว \vec{v} ทำให้ได้วัตถุมีมวลเป็น $m + dm$ ซึ่งมีความเร็วเปลี่ยนไป
เป็น $\vec{v} + d\vec{v}$ ในช่วงเวลาจาก t เป็น $t + dt$ ดังรูป



ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมในช่วงเวลาสั้น ๆ dt หรือการดลคือ

$$d\vec{P} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - (m\vec{v} + \vec{u}dm)$$

$$d\vec{P} = m\vec{v} + md\vec{v} + \vec{v}dm + dmd\vec{v} - m\vec{v} - \vec{u}dm$$

$$d\vec{P} = md\vec{v} + \vec{v}dm + dmd\vec{v} - \vec{u}dm$$

พิจารณาขณะที่ dm และ $d\vec{v}$ มีค่าน้อย เทอม $dmd\vec{v}$ จะน้อยมาก(ตัดทิ้งได้)

สมการลดรูปได้ว่า
$$d\vec{P} = md\vec{v} + \vec{v}dm - \vec{u}dm$$

พิจารณาถึงแรงดลจากแรงภายนอก สามารถเขียนสมการได้ว่า

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{md\vec{v} + \vec{v}dm - \vec{u}dm}{dt}$$

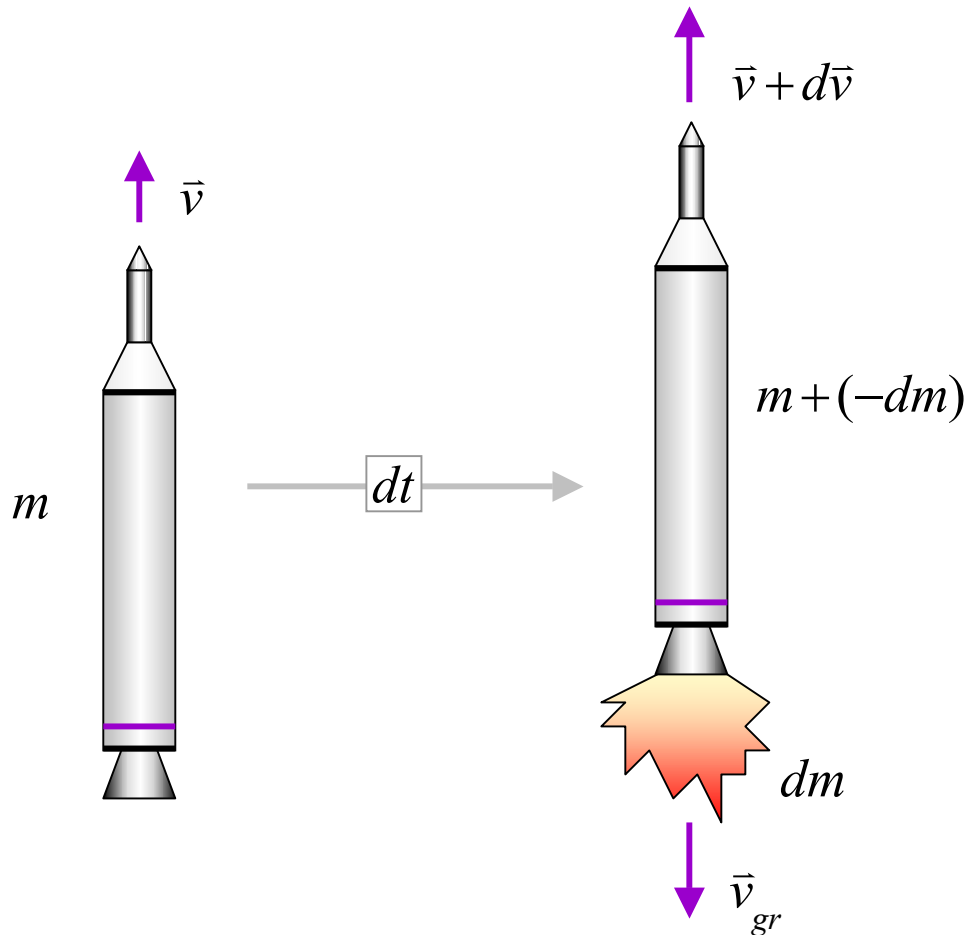
$$\vec{F}_{ext} = \frac{md\vec{v}}{dt} - (\vec{u} - \vec{v})\frac{dm}{dt}$$

พิจารณาความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างวัตถุมวล dm และ m จะได้ว่า ความเร็ว
สัมพัทธ์เท่ากับ $\vec{v}_r = (\vec{u} - \vec{v})$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการได้ว่า

$$\frac{md\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{v}_r \frac{dm}{dt}$$

โดยที่เทอม $\vec{v}_r \frac{dm}{dt}$ แทนอัตราการใส่หรือเอาออกโมเมนตัมของระบบ

พิจารณาการเคลื่อนที่ของจรวด มวล m ด้วยความเร็ว \vec{v} เมื่อเวลาผ่านไป dt จรวดขับดันก๊าซออกมา dm ด้วยความเร็วของก๊าซเทียบกับโลก \vec{v}_{gr} ส่งผลให้จรวดมีความเร็วเปลี่ยนไปเป็น $\vec{v} + d\vec{v}$ และมีมวลเป็น $m + (-dm)$



จากสมการของแรงภายนอกกับความเร็วสัมพัทธ์ $\frac{m d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{v}_r \frac{dm}{dt}$

พิจารณากรณี ไม่มีแรงภายนอกกระทำ

จากสมการของแรงภายนอกกับความเร็วสัมพัทธ์ $\frac{m d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{v}_r \frac{dm}{dt}$

สามารถลดรูปได้ว่า $\frac{m d\vec{v}}{dt} = 0 + \vec{v}_r \frac{dm}{dt}$ เรียกแรงนี้ว่าแรงผลักดัน (thrust)

กำหนดให้ \vec{v}_{gr} คือความเร็วของก๊าซเทียบกับจรวด มีทิศลง ค่าจะเป็นลบ

$$\frac{m dv}{dt} = -v_{gr} \frac{dm}{dt}$$

กำหนดให้เวลาเริ่มต้นพิจารณา จรวดมีมวล m_0 และกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_0 สามารถอินทิเกรตสมการ โดยใส่ขอบเขตได้ว่า

$$\int_{v_0}^v dv = -\int_{m_0}^m v_{gr} \frac{dm}{m}$$

$$v - v_0 = -v_{gr} \ln \frac{m}{m_0}$$

$$v = v_0 + v_{gr} \ln \frac{m_0}{m}$$

พิจารณากรณี มีแรงภายนอกมากระทำ

แรงภายนอกที่กระทำต่อจรวดมีค่าเท่ากับ $\vec{F}_{ext} = -m\vec{g}$ (ติดลบเนื่องจากมีทิศลง) และกำหนดให้ v_{gr} คือความเร็วของก๊าซเทียบกับจรวด มีทิศลงจากการพิจารณาทิศทาง สามารถถอดเวกเตอร์ได้ตั้งสมการ

$$\frac{mdv}{dt} = -v_{gr} \frac{dm}{dt} - mg$$

$$dv = -v_{gr} \frac{dm}{m} - gdt$$

กำหนดให้เวลาเริ่มต้นพิจารณา จรวดมีมวล m_0 และกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_0 สามารถอินทิเกรตสมการ โดยใส่ขอบเขตได้ว่า

$$\int_{v_0}^v dv = -\int_{m_0}^m v_{gr} \frac{dm}{m} - \int_{t_0}^t gdt$$

$$v - v_0 = -v_{gr} \ln \frac{m}{m_0} - g(t - t_0)$$

$$v = v_0 + v_{gr} \ln \frac{m_0}{m} - g(t - t_0)$$

กรณีที่ มวลคงที่ไม่มีเปลี่ยนแปลง $m = m_0$ สมการจะลดรูปได้ว่า

$$v = v_0 - g(t - t_0)$$

ซึ่งให้ผลอย่างเดียวกับเรื่องการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่

ถ้าพิจารณาอัตราการใช้เชื้อเพลิงเป็นค่าคงตัว $-\alpha$ โดยที่ $\alpha > 0$ จะได้ว่า

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha \quad ; \quad dm = -\alpha dt$$

$$m = m_0 - \alpha(t - t_0)$$

$$\frac{m - m_0}{\alpha} = -(t - t_0)$$

และจากสมการความเร็ว เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำ ได้สมการว่า

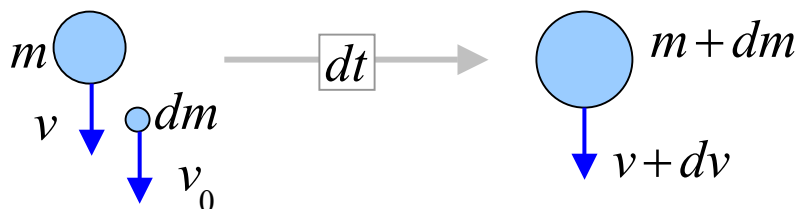
$$v = v_0 + v_{gr} \ln \frac{m_0}{m} + \frac{g}{\alpha}(m - m_0)$$

อินทิเกรตสมการความเร็ว ได้สมการการเคลื่อนที่ว่า

$$y = y_0 + (v_0 + v_{gr})(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 - \frac{v_{gr} m}{\alpha} \ln \frac{m_0}{m}$$

พิจารณาระบบหยดน้ำฝน

หยดน้ำฝนมวล m ความเร็ว v รวมเข้ากับหยดน้ำฝน dm ความเร็ว v_0 กลายเป็นหยดน้ำมวล $m + dm$ ความเร็ว $v + dv$ ในช่วงเวลา dt



ในช่วงเวลา dt โมเมนตัมเปลี่ยนแปลงไปเท่ากับ dp

$$dp = (m + dm)(v + dv) - mv - v_0 dm$$

$$dp = mdv + (v - v_0)dm + dmdv$$

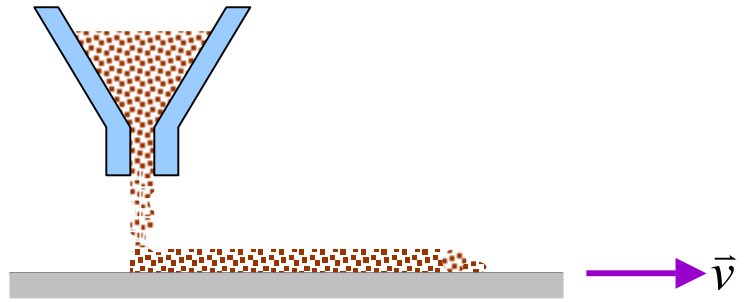
พิจารณา $dmdv$ มีค่าน้อยมาก จะได้แรงภายนอกที่กระทำต่อระบบคือ

$$F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} + (v - v_0) \frac{dm}{dt}$$

สามารถสมมติแรงภายนอกเกิดเนื่องจากแรงโน้มถ่วงและแรงต้านอากาศ

พิจารณาระบบสายพานส่งของ

เมื่อวัสดุตกจากกรวยลงบน
สายพานส่งของ ด้วยอัตรา $\frac{dm}{dt}$
จากกรวยตกลงบนสายพาน



ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วค่าคงตัว \vec{v} มวลของสายพานในช่วงที่พิจารณา M
ณ เวลา t วัสดุมีมวล m

โมเมนตัมของระบบ สายพานและเม็ดวัสดุบนสายพาน

$$\text{ณ เวลา } t \quad ; \quad p = (m + M)v$$

$$\text{ณ เวลา } t + dt \quad ; \quad p + dp = (m + dm + M)v$$

สามารถเขียนการดลได้ว่า

$$dp = Fdt = (m + dm + M)v - (m + M)v$$

$$F = v \frac{dm}{dt}$$

$$\text{กำลังที่ใช้ในการขับ} \quad P = Fv = v^2 \frac{dm}{dt}$$

พลังงานจลน์ของระบบ สายพานและเม็ดวัสดุ

$$\text{ณ เวลา } t \quad ; \quad K = \frac{1}{2}(m + M)v^2$$

$$\text{ณ เวลา } t + dt \quad ; \quad K + dK = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}(m + dm)v^2$$

พลังงานจลน์ของระบบที่เปลี่ยนไป

$$dK = \frac{1}{2}(m + M)v^2$$

$$\text{อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ได้ว่า} \quad \frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}v^2 \frac{dm}{dt}$$

จะเห็นได้ว่า กำลังงานสูญเสียเป็นครึ่งหนึ่งของกำลังงานที่ใช้ขับเคลื่อน

หนังสืออิเล็กทรอนิกส์	
ฟิสิกส์ 1(ภาคกลศาสตร์(ฟิสิกส์ 1 (ความร้อน)
ฟิสิกส์ 2	กลศาสตร์เวกเตอร์
โลหะวิทยาฟิสิกส์	เอกสารคำสอนฟิสิกส์ 1
ฟิสิกส์ 2 (บรรยาย(แก้ปัญหาฟิสิกส์ด้วยภาษา C
ฟิสิกส์พิศวง	สอนฟิสิกส์ผ่านทางอินเทอร์เน็ต
ทดสอบออนไลน์	วิดีโอการเรียนการสอน
หน้าแรกในอดีต	แผ่นใสการเรียนการสอน
เอกสารการสอน PDF	กิจกรรมการทดลองทางวิทยาศาสตร์
แบบฝึกหัดออนไลน์	สุดยอดสิ่งประดิษฐ์
การทดลองเสมือน	
บทความพิเศษ	ตารางธาตุไทย1) 2 (Eng)
พจนานุกรมฟิสิกส์	ลับสมองกับปัญหาฟิสิกส์
ธรรมชาติมหัศจรรย์	สูตรพื้นฐานฟิสิกส์
การทดลองมหัศจรรย์	ดาราศาสตร์ราชมงคล
แบบฝึกหัดกลาง	
แบบฝึกหัดโลหะวิทยา	แบบทดสอบ
ความรู้รอบตัวทั่วไป	อะไรเอ่ย ?
ทดสอบ)เกมเศรษฐี(คติปริศนา
ข้อสอบเอนทรานซ์	เฉลยกลศาสตร์เวกเตอร์
คำศัพท์ประจำสัปดาห์	
ความรู้รอบตัว	
การประดิษฐ์ของโลก	ผู้ได้รับโนเบลสาขาฟิสิกส์
นักวิทยาศาสตร์เทศ	นักวิทยาศาสตร์ไทย
ดาราศาสตร์พิศวง	การทำงานของอุปกรณ์ทางฟิสิกส์
การทำงานของอุปกรณ์ต่าง ๆ	

 การเรียนรู้การสอนฟิสิกส์ 1 ผ่านทางอินเทอร์เน็ต 	
1. การวัด	2. เวกเตอร์
3. การเคลื่อนที่แบบหนึ่งมิติ	4. การเคลื่อนที่บนระนาบ
5. กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน	6. การประยุกต์กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน
7. งานและพลังงาน	8. การดลและโมเมนตัม
9. การหมุน	10. สมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง
11. การเคลื่อนที่แบบคาบ	12. ความยืดหยุ่น
13. กลศาสตร์ของไหล	14. ปริมาณความร้อน และ กลไกการถ่ายโอนความร้อน
15. กฎข้อที่หนึ่งและสองของเทอร์โมไดนามิก	16. คุณสมบัติเชิงโมเลกุลของสสาร
17. คลื่น	18. การสั่น และคลื่นเสียง
 การเรียนรู้การสอนฟิสิกส์ 2 ผ่านทางอินเทอร์เน็ต 	
1. ไฟฟ้าสถิต	2. สนามไฟฟ้า
3. ความกว้างของสายฟ้า	4. ตัวเก็บประจุและการต่อตัวต้านทาน
5. ศักย์ไฟฟ้า	6. กระแสไฟฟ้า
7. สนามแม่เหล็ก	8. การเหนี่ยวนำ
9. ไฟฟ้ากระแสสลับ	10. ทรานซิสเตอร์
11. สนามแม่เหล็กไฟฟ้าและเสาอากาศ	12. แสงและการมองเห็น
13. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ	14. กลศาสตร์ควอนตัม
15. โครงสร้างของอะตอม	16. นิวเคลียร์
 การเรียนรู้การสอนฟิสิกส์ทั่วไป ผ่านทางอินเทอร์เน็ต 	
1. จลศาสตร์ (kinematic)	2. จลพลศาสตร์ (kinetics)
3. งานและโมเมนตัม	4. ซิมเปิลฮาร์โมนิก คลื่น และเสียง
5. ของไหลกับความร้อน	6. ไฟฟ้าสถิตกับกระแสไฟฟ้า
7. แม่เหล็กไฟฟ้า	8. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับแสง
9. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ อะตอม และนิวเคลียร์	

