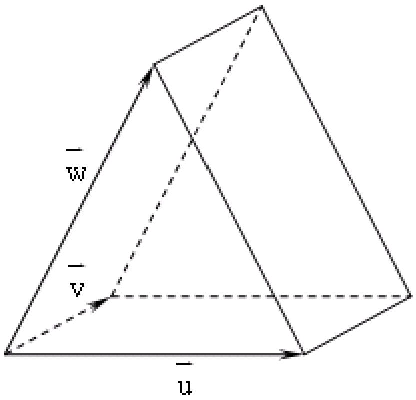
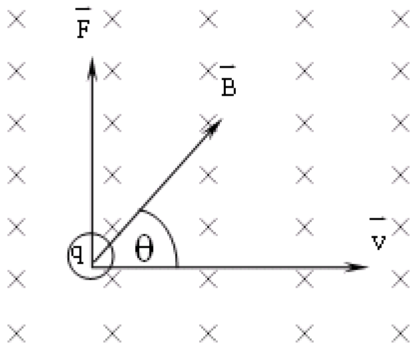
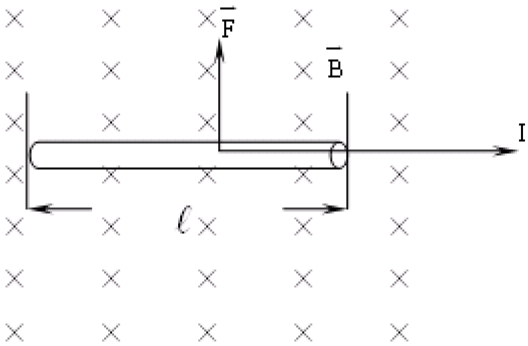
เวกเตอร์
(Vector)







หนังสือเรียนออนไลน์ ช่วงชั้นที่ 4
ชุด “คณิตศาสตร์บนเว็บไซต์” เล่มที่ 9

สัทรา หาญวงศ์ฤทธิ์

คำนำ

หนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้เป็นเล่มที่ 9 ในจำนวนทั้งหมด 15 เล่ม ซึ่งผู้เขียนได้เรียบเรียงขึ้นโดยมีเนื้อหาเกี่ยวกับเวกเตอร์ใน 2 มิติ และเวกเตอร์ใน 3 มิติ รวมทั้งการประยุกต์เวกเตอร์เพื่อการพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติและการแก้ปัญหาในทางวิทยาศาสตร์บางสาขา

ในบทที่ 1 จะแนะนำให้รู้จักกับเวกเตอร์ 2 มิติ การเขียนเวกเตอร์ในรูปแบบต่างๆ การแทนจุดในระบบพิกัดฉากด้วยเวกเตอร์ตำแหน่ง การบวกและการลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ รวมทั้งทฤษฎีบทที่น่าสนใจเกี่ยวกับเวกเตอร์ใน 2 มิติ

ส่วนในบทที่ 2 จะแนะนำให้รู้จักกับเวกเตอร์ 3 มิติ การแทนจุดในระนาบด้วยเวกเตอร์ตำแหน่ง การบวกและการลบเวกเตอร์ใน 3 มิติ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ ตลอดจนทฤษฎีบทที่น่าสนใจเกี่ยวกับเวกเตอร์ใน 3 มิติ

ในบทที่ 3 ซึ่งเป็นบทส่งท้ายของหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้ จะแสดงให้เห็นว่าเวกเตอร์สามารถนำไปใช้ในเรื่องใดได้บ้าง โดยผู้เขียนนำมาแสดงให้ดู 6 เรื่อง ได้แก่ การพิสูจน์กฎของโคไซน์ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน การประยุกต์ในทางฟิสิกส์บางเรื่อง เป็นต้น

นายสัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์

22 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2549

สารบัญ

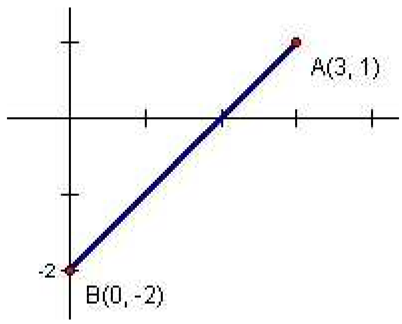
บทที่ 1
เวกเตอร์ 2 มิติ

1.1 เวกเตอร์

เวกเตอร์ (Vector) เป็นปริมาณที่กำหนดขึ้นเพื่อใช้อธิบายเกี่ยวกับขนาดและทิศทาง หากกล่าวเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งจะไม่สมบูรณ์ เช่น ความเร็ว (speed) หากเรากล่าวถึงความเร็วจะต้องกล่าวถึงทั้งขนาดและทิศทาง จึงจะได้ใจความสมบูรณ์ ในกรณีนี้หากจะกล่าวถึงเฉพาะขนาดของเวกเตอร์ความเร็วเพียงอย่างเดียว เราจะใช้คำว่า “อัตราเร็ว” (velocity) แทน

1.1.1 การเขียนเวกเตอร์แทน 2 จุดที่กำหนดให้ในระบบพิกัดฉาก

สมมติว่ากำหนดจุดในระบบพิกัดฉากมาให้ 2 จุด คือ A, B เราสามารถหาเวกเตอร์ที่แทนส่วนของเส้นตรง AB ได้เสมอ ตัวอย่างเช่น กำหนดจุด A(3, 1) และจุด B(0, –2) เราสามารถสร้างส่วนของเส้นตรง AB ได้ดังรูป



รูป 1.1 ส่วนของเส้นตรง AB

ในการหาเวกเตอร์ที่แทนส่วนของเส้นตรง AB นั้น สมมติว่าเราจะหาเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ เราก็ทำได้โดยนำพิกัดของจุด B มาลบกับพิกัดของจุด A ดังนี้

$\overrightarrow{AB} = (0, -2) - (3, 1) = (-3, -3)$

ในทำนองเดียวกัน หากเราต้องการหาเวกเตอร์ $\overrightarrow{BA}$ เราก็นำพิกัดของจุด A มาลบกับพิกัดของจุด B ดังนี้

$\overrightarrow{BA} = (3, 1) - (0, -2) = (3, 3)$

อนึ่ง การเขียนเวกเตอร์ในรูปของคู่อันดับนั้น นิยมเขียนกันมากเนื่องจากว่าสะดวกต่อการนำไปใช้งานและการคำนวณ

โดยทั่วไป ถ้าเวกเตอร์อยู่ในรูป (x, y) จะกล่าวว่า x เป็น **“ส่วนประกอบของเวกเตอร์”** ในแนวแกน X และในทำนองเดียวกัน y ก็เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์ในแนวแกน Y

1.1.2 ขนาดของเวกเตอร์ และการเท่ากันของเวกเตอร์

บทนิยาม 1.1
กำหนดให้ (x, y) เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก แล้วขนาดของเวกเตอร์แทนด้วยสัญลักษณ์ $|(x, y)|$
โดยที่ $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$

บทนิยาม 1.2
กำหนดให้ $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก จะกล่าวว่า $\vec{u} = \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}, \vec{v}$ มีขนาดเท่ากัน และมีทิศไปทางเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้ $A(0, 6)$, $B(3, -4)$, $C(-1, -3)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก จงหา $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ พร้อมทั้งขนาดของเวกเตอร์ทั้งสามด้วย

วิธีทำ
$\overrightarrow{AB} = (3, -4) - (0, 6) = (3, -10)$

$\overrightarrow{AC} = (-1, -3) - (0, 6) = (-1, -9)$

$\overrightarrow{BC} = (-1, -3) - (3, -4) = (-4, 1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-10)^2} = \sqrt{109}$ หน่วย

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-9)^2} = \sqrt{82}$ หน่วย

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ หน่วย ❑

1.1.3 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน และเวกเตอร์ตำแหน่ง

บทนิยาม 1.3
เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) คือ เวกเตอร์ใดๆ ที่มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วยเสมอ

ตัวอย่างที่ 1.2 กำหนดให้ $\vec{u} = (1, 0)$ จงแสดงว่า $\vec{u}$ ที่กำหนดให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

วิธีทำ เนื่องจาก $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$
แสดงว่า $\vec{u}$ ที่กำหนดให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ❑

เวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉากย่อมมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเสมอ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางขนานกับเวกเตอร์นั้นก็เกิดจากการนำขนาดของเวกเตอร์มาหารส่วนประกอบของเวกเตอร์ที่กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้ $\vec{u} = (3, 4)$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{U}$ พร้อมทั้งแสดงให้เห็นว่า $\vec{U}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยจริง

วิธีทำ เนื่องจาก $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

เพราะฉะนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{U} = \frac{1}{5}(3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

และ $|\vec{U}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$ แสดงว่า $\vec{U}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยจริง ❑

บทนิยาม 1.4
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน (standard unit vector) คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางขนานกับแกนพิกัดฉาก

จากบทนิยาม 1.4 แสดงว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐานในระบบพิกัดฉากก็คือ เวกเตอร์ (1, 0) และเวกเตอร์ (0, 1) นั่นเอง และเพื่อความสะดวกจึงแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ ตามลำดับ

จากที่เราได้ทราบมาแล้วว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ใดก็จะมีทิศทางที่ขนานกับเวกเตอร์นั้น เราจึงสามารถเขียนเวกเตอร์ของจุดใดๆ ในระบบพิกัดฉากได้โดยอาศัยเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน แต่ก่อนที่จะไปถึงตรงนั้นจะขอให้พิจารณาบทนิยามต่อไปนี้เสียก่อน

บทนิยาม 1.5
เวกเตอร์ตำแหน่ง (position vector) คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นจากจุดกำเนิดในระบบพิกัดฉาก และมีจุดปลายอยู่ที่จุดใดๆ ในระบบพิกัดฉาก

จากบทนิยาม 1.5 จะเห็นได้ว่า ถ้าเรามีจุด A บนระบบพิกัดฉากแล้วจะได้ว่า $\overrightarrow{OA}$ จะเป็นเวกเตอร์ตำแหน่งที่มีจุดปลายอยู่ที่จุด A

ตัวอย่างที่ 1.4 กำหนดให้ A(3, –4) จงหาเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด A

วิธีทำ จากบทนิยาม 1.5 จะได้ว่าเวกเตอร์ตำแหน่งที่มีจุดปลายอยู่ที่จุด A คือ (3, –4) ❑

ตัวอย่างที่ 1.5 กำหนดให้ X(1, 0) และ Y(0, 1) เป็นจุดในระบบพิกัดฉาก จงหาเวกเตอร์ตำแหน่งที่มีจุดปลายอยู่ที่จุด X และจุด Y ตามลำดับ

วิธีทำ จากบทนิยาม 1.5 จะได้ว่าเวกเตอร์ตำแหน่งที่มีจุดปลายอยู่ที่จุด X คือ เวกเตอร์ (1, 0)
และในทำนองเดียวกัน เวกเตอร์ตำแหน่งที่มีจุดปลายอยู่ที่จุด Y คือ เวกเตอร์ (0, 1) ❑

เพราะฉะนั้น จากบทนิยาม 1.4 และบทนิยาม 1.5 เราจึงสามารถเขียนเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด P(x, y) ใดๆ ในระบบพิกัดฉากได้โดยอยู่ในรูปเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐานคือ $x\vec{i} + y\vec{j}$ เมื่อ x, y เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์ในแนวแกน X และแกน Y ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 1.6 จากตัวอย่างที่ 1.4 จงเขียนเวกเตอร์ตำแหน่งในรูป $x\vec{i} + y\vec{j}$

วิธีทำ เนื่องจากเวกเตอร์ตำแหน่งที่ได้คือ (3, –4)
ดังนั้น จึงเขียนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐานได้คือ $3\vec{i} - 4\vec{j}$ ❑

บทนิยาม 1.6
กำหนดให้ $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก แล้วขนาดของ $\vec{u}$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $|\vec{u}|$
โดยที่ $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

<u>**ข้อสังเกต**</u>
จากบทนิยาม 1.6 จะเห็นได้ว่าการหาขนาดของเวกเตอร์ ไม่ว่าจะกำหนดด้วยรูปแบบใดก็ตาม สมการที่ใช้ในการหานั้นไม่มีความแตกต่างกันแต่อย่างใด

1.1.4 เวกเตอร์ศูนย์

บทนิยาม 1.7
เวกเตอร์ศูนย์ (Zero vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับศูนย์ หรืออาจกล่าวว่าเป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายอยู่ที่จุดเดียวกัน เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{0}$

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดให้ A(3, –5), B(3, –5) จงแสดงว่า $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์

วิธีทำ จากจุดที่กำหนดให้ จะได้ว่า $\overrightarrow{AB} = (0, 0)$
และเนื่องจาก $|\overrightarrow{AB}| = 0$ จึงสรุปได้ว่าเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ❑

แบบฝึกหัด 1.1

1. กำหนดให้ A(3, 1), B(–2, 5), C(0, 0), D(–5, 4) จงแสดงว่า $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
2. จากข้อ 1. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ตามลำดับ
3. กำหนดให้ $\vec{u} = 2a\vec{i} + 3b\vec{j}$ และ $\vec{v} = a\vec{i} + 6b\vec{j}$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ถ้าทราบว่า $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ และ $2a + 3b = 9$ แล้วจงหาค่าของ $a^2 + b^2$

ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ

1.2 การบวกและการลบเวกเตอร์

บทนิยาม 1.8
กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$, $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก จะได้ว่า

1) $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2)\vec{i} + (b_1 + b_2)\vec{j}$

1) $\vec{u} - \vec{v} = (a_1 - a_2)\vec{i} + (b_1 - b_2)\vec{j}$

ตัวอย่างที่ 1.8 กำหนดให้ $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ จงแสดงการหาค่าของ $\vec{u} + \vec{v}$ และ $\vec{u} - \vec{v}$ ตามลำดับ

วิธีทำ จาก $\vec{u} + \vec{v} = (2\vec{i} - \vec{j}) + (\vec{i} + 3\vec{j}) = (2 + 1)\vec{i} + (-1 + 3)\vec{j} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

และ $\vec{u} - \vec{v} = (2\vec{i} - \vec{j}) - (\vec{i} + 3\vec{j}) = (2 - 1)\vec{i} + (-1 - 3)\vec{j} = \vec{i} - 4\vec{j}$ ❑

แบบฝึกหัด 1.2

1. กำหนดให้ $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก และไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ จงแสดงการหาค่าของ $\vec{u} + \vec{v}$ และ $\vec{u} - \vec{v}$ โดยการวาดกราฟ
2. โดยการวาดกราฟ จงแสดงว่า สำหรับ $\vec{u}, \vec{v}$ ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$
3. จงแสดงว่า สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ใดๆ ในระบบพิกัดฉากมีสมบัติการสลับที่ของการบวก และสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก

ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ

1.3 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

บทนิยาม 1.9

กำหนดให้ k เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ ในระบบพิกัดฉากแล้ว จะได้ว่า

$k\vec{u} = kx\vec{i} + ky\vec{j}$

ตัวอย่างที่ 1.9 กำหนดให้ $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ และ $k = 2$ จงหาค่าของ $k\vec{u}$

วิธีทำ จากบทนิยาม 1.8 จะได้ว่า

$$k\vec{u} = (2 \cdot 2)\,\vec{i} + 2\vec{j} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$$ ❑

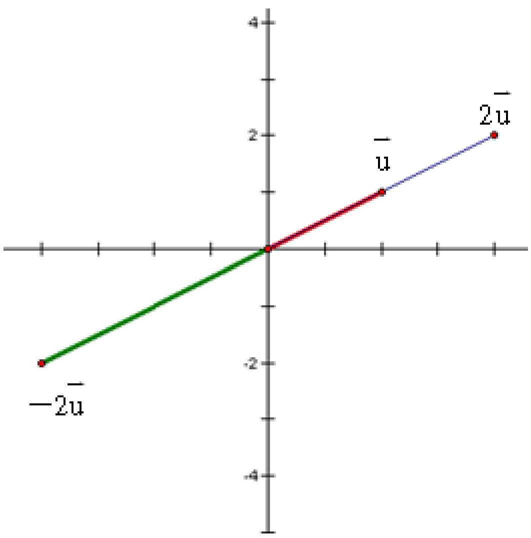
1.3.1 ความหมายในเชิงเรขาคณิตของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในเชิงเรขาคณิตเป็นการย่อหรือขยายเวกเตอร์ที่กำลังพิจารณาอยู่ โดยขนาดของเวกเตอร์ผลลัพธ์จะเท่ากับ $|k||\vec{u}|$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{u}$ ส่วนทิศทางของเวกเตอร์ผลลัพธ์นั้นขึ้นอยู่กับค่า k เป็นสำคัญ กล่าวคือ ถ้า $k > 0$ แล้วเวกเตอร์ผลลัพธ์จะมีทิศไปทางเดียวกับ $\vec{u}$ และในทางกลับกัน ถ้า $k < 0$ แล้วเวกเตอร์ผลลัพธ์จะมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$

ตัวอย่างที่ 1.10 จากตัวอย่างที่ 1.8 ถ้า $k = -2$ แล้วจงหาค่าของ $k\vec{u}$ พร้อมทั้งวาดกราฟเพื่อแสดงทิศทางของ $\vec{u}$, $k\vec{u}$ จากตัวอย่างที่ 1.8 และ $k\vec{u}$ จากตัวอย่างนี้

วิธีทำ $k\vec{u} = ((-2)\cdot 2)\,\vec{i} + (-2)\,\vec{j} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$

วาดกราฟได้ดังนี้



❑

1.3.2 สมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์มีสมบัติที่น่าสนใจหลายประการ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1

กำหนดให้ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก และ k, m เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้วจะได้ว่า

1) $-\overrightarrow{u} = (-1)\overrightarrow{u}$

2) $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u}$

3) $m\left(k\overrightarrow{u}\right) = (mk)\overrightarrow{u}$

4) $(m+k)\overrightarrow{u} = m\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{u}$

5) $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\overrightarrow{u} = a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = a_2\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j}$

1)
$$\begin{aligned} -\overrightarrow{u} &= -(a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j}) \\ &= (-1)(a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j}) \\ &= (-1)\overrightarrow{u} \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) &= (a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j}) + (-a_1\overrightarrow{i} - b_1\overrightarrow{j}) \\ &= (a_1\overrightarrow{i} + (-a_1\overrightarrow{i})) + (b_1\overrightarrow{j} + (-b_1\overrightarrow{j})) \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} &= (-a_1\overrightarrow{i} - b_1\overrightarrow{j}) + (a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j}) \\ &= ((-a_1\overrightarrow{i}) + a_1\overrightarrow{i}) + ((-b_1\overrightarrow{j}) + b_1\overrightarrow{j}) \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} m\left(k\overrightarrow{u}\right) &= m(ka_1\overrightarrow{i} + kb_1\overrightarrow{j}) \\ &= mka_1\overrightarrow{i} + mkb_1\overrightarrow{j} \\ &= (mk)a_1\overrightarrow{i} + (mk)b_1\overrightarrow{j} \\ &= (mk)(a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j}) \\ &= (mk)\overrightarrow{u} \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} (m+k)\overrightarrow{u} &= (m+k)(a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j}) \\ &= (m+k)a_1\overrightarrow{i} + (m+k)b_1\overrightarrow{j} \\ &= (ma_1\overrightarrow{i} + ka_1\overrightarrow{i}) + (mb_1\overrightarrow{j} + kb_1\overrightarrow{j}) \\ &= (ma_1\overrightarrow{i} + mb_1\overrightarrow{j}) + (ka_1\overrightarrow{i} + kb_1\overrightarrow{j}) \\ &= m(a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j}) + k(a_1\overrightarrow{i} + b_1\overrightarrow{j}) \\ &= m\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{u} \end{aligned}$$

5) $k(\vec{u}+\vec{v}) = k[(a_1\vec{i}+b_1\vec{j})+(a_2\vec{i}+b_2\vec{j})]$

$= k(a_1\vec{i}+b_1\vec{j})+k(a_2\vec{i}+b_2\vec{j})$

$= k\vec{u} + k\vec{v}$ ❑

ঔ ঔ ঔ ঔ ঔ ঔ

1.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์

1.4.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product or dot product)

บทนิยาม 1.10
กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$, $\vec{v} = a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ แล้วผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ กำหนดโดย $\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2+b_1b_2$

ตัวอย่างที่ 1.11 กำหนดให้ $\vec{u} = 2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{i}+9\vec{j}$ จงหาค่าของ $\vec{u}\cdot\vec{v}$

วิธีทำ จากบทนิยาม 1.10 จะได้ว่า

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2)(-2)+(1)(9) = -4+9 = 5$ ❑

ตัวอย่างที่ 1.12 กำหนดให้ $\vec{u} = a\vec{i}+b\vec{j}$, $\vec{v} = -a\vec{i}+2b\vec{j}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ถ้าทราบว่า $\vec{u}\cdot\vec{v} = 11$ และ $|\vec{u}| = 5$ แล้วจงหาขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}+\vec{v}$

วิธีทำ จาก $\vec{u}\cdot\vec{v} = -a^2+2b^2 = 11$ -----(1.4.1)

และ $|\vec{u}| = \sqrt{a^2+b^2} = 5$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการได้ $a^2+b^2 = 25$ -----(1.4.2)

(1.4.1) + (1.4.2) $3b^2 = 11+25 = 36$

$b^2 = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12}$ (โจทย์กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวกเท่านั้น)

$a^2 = 25-b^2 = 25-12 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$

จะได้ว่า $\vec{u} = \sqrt{13}\vec{i}+\sqrt{12}\vec{j}$, $\vec{v} = -\sqrt{13}\vec{i}+2\sqrt{12}\vec{j}$

ดังนั้น $\vec{u}+\vec{v} = (\sqrt{13}\vec{i}+\sqrt{12}\vec{j})+(-\sqrt{13}\vec{i}+2\sqrt{12}\vec{j})$

$= 0\vec{i}+3\sqrt{12}\vec{j} = 3\sqrt{12}\vec{j}$

เพราะฉะนั้น $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{0^2+(3\sqrt{12})^2}$

$= 3\sqrt{12} = 6\sqrt{3}$ หน่วย ❑

นอกจาก $\vec{u}\cdot\vec{v}$ จะนิยามในรูปของส่วนประกอบของเวกเตอร์แล้ว ยังสามารถนิยามได้อีกลักษณะหนึ่งดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.11
กำหนดให้ $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}, \vec{v}$ โดยที่ $0 \le \theta \le \pi$ แล้ว

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

ตัวอย่างที่ 1.13 กำหนดให้ $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก ถ้าทราบว่า $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 4$ และเวกเตอร์ทั้งสองอันทำมุม $\frac{\pi}{3}$ กับแกน X จงหาค่าของ $\vec{u}\cdot\vec{v}$

วิธีทำ จากบทนิยาม 1.11 เราทราบว่า $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

แทนค่า $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 4$ และ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ลงในสมการข้างต้นจะได้ว่า

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (3)(4)\cos\frac{\pi}{3} = (3)(4)\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$ ❑

<u>**ข้อสังเกต**</u>

1. จากบทนิยาม 1.11 หากเราทราบผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก และขนาดของเวกเตอร์ทั้งสองแล้ว เราสามารถหาขนาดของมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองได้เสมอ
2. ผลคูณเชิงสเกลาร์มีผลลัพธ์เป็นสเกลาร์เสมอ

ผลคูณเชิงสเกลาร์มีสมบัติที่น่าสนใจหลายประการดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2
กำหนดให้ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก และ $|\vec{u}|, |\vec{v}| \neq 0$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
3) $\vec{u} \perp \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ มุมระหว่าง $\vec{u}, \vec{v}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{2}$
4) $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ มุมระหว่าง $\vec{u}, \vec{v}$ เท่ากับ 0
5) $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})$
6) $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})$

พิสูจน์ กำหนดให้ กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$, $\vec{v} = a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$, $\vec{w} = a_3\vec{i}+b_3\vec{j}$

และ $|\vec{u}| \neq 0, |\vec{v}| \neq 0$

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ $= a_1a_2 + b_1b_2$

$= a_2a_1 + b_2b_1$

$= \vec{v}\cdot\vec{u}$

2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = (a_1\vec{i}+b_1\vec{j})\cdot((a_2\vec{i}+b_2\vec{j})+(a_3\vec{i}+b_3\vec{j}))$

$= (a_1\vec{i}+b_1\vec{j})\cdot((a_2+a_3)\vec{i}+(b_2+b_3)\vec{j})$

$= a_1(a_2+a_3)+b_1(b_2+b_3)$

$= (a_1a_2+b_1b_2)+(a_1a_3+b_1b_3)$

$= \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

3) ผู้อ่านลองพิสูจน์เอง

4) ผู้อ่านลองพิสูจน์เอง

5) $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})$

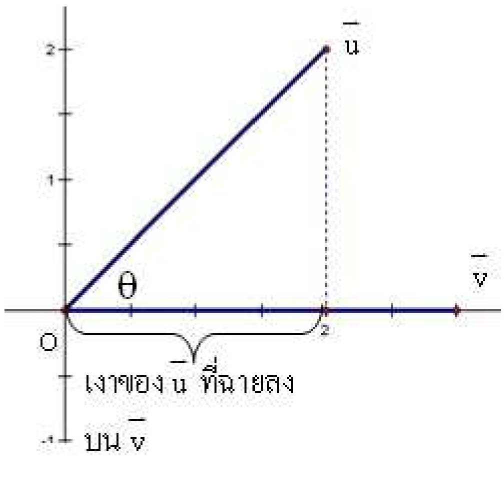
$= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}$

$= |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})$

6) พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 5) โดยแทนที่ $\vec{v}$ ด้วย $-\vec{v}$ ❑

1.4.2 การฉายเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์

เพื่อความสะดวกในการพิจารณา เราจะกำหนดให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์รัศมี ทำมุมแหลม θ กับแกน X และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่บนแกน X และ $|\vec{v}| \neq 0$ ดังรูป



รูป 1.2 การฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

จากรูป 1.2 จะเห็นได้ว่าเงาที่เกิดจากการฉายเวกเตอร์ $\vec{u}$ ลงบนเวกเตอร์ $\vec{v}$ ก็คือเวกเตอร์ $\vec{u}\cos\theta$ และจากความรู้เกี่ยวกับผลคูณเชิงสเกลาร์ เราทราบว่า $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = (|\vec{u}|\cos\theta)|\vec{v}|$

จากนั้นนำ $|\vec{v}|$ หารตลอดสมการ จะได้ $|\vec{u}|\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$ ซึ่งพจน์ $|\vec{u}|\cos\theta$ เราจะเรียกว่า **"การฉายเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$"** ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$

ในทำนองเดียวกันสำหรับพจน์ $|\vec{v}|\cos\theta$ จะเรียกว่า **"การฉายเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{v}$ บน $\vec{u}$"** ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ $\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|}$ และเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$

ตัวอย่างที่ 1.14 กำหนดให้ $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ และ $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ จงหาการฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

วิธีทำ

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(2)(1)+(3)(2)}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

❑

ตัวอย่างที่ 1.15 จากเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในตัวอย่างที่ 1.14 จงหาการฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{v}$ บน $\vec{u}$

วิธีทำ

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{8}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$$

❑

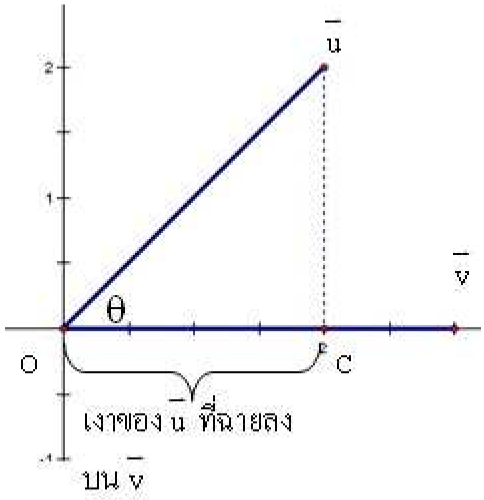
แบบฝึกหัด 1.4

1. จงแสดงว่าทฤษฎีบท 1.2 ข้อ (3) และข้อ (4) เป็นจริง
2. จงหาการฉายเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ในตัวอย่างที่ 1.9 และตัวอย่างที่ 1.10
3. จงวาดภาพเพื่อแสดงการฉายเชิงสเกลาร์ในตัวอย่างที่ 1.14 และตัวอย่างที่ 1.15

1.4.3 การฉายเชิงเวกเตอร์

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้พิจารณาเกี่ยวกับการฉายเชิงสเกลาร์ โดยถ้ากำหนดเวกเตอร์ให้สองเวกเตอร์แล้ว เราสามารถหาการฉายเชิงสเกลาร์ได้เสมอ สังเกตว่าผลลัพธ์เป็นสเกลาร์เช่นกัน

สำหรับในหัวข้อนี้เราจะมาพิจารณาการฉายเชิงเวกเตอร์ กล่าวคือ เราจะมาพิจารณาวิธีการหาเวกเตอร์ "เงา" ที่เกิดจากการฉายเวกเตอร์หนึ่งลงบนอีกเวกเตอร์หนึ่ง



รูป 1.3 การฉายเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

กำหนดให้ $\overrightarrow{OC}$ เป็นเวกเตอร์ที่เกิดจากการฉาย $\vec{u}$ ลงบน $\vec{v}$ และจากรูป 1.3 จะเห็นได้ว่า $\overrightarrow{OC}$ ขนานกับ $\vec{v}$ เราจึงได้ว่า $\overrightarrow{OC}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ ดังนั้น จึงต้องหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{v}$ นั่นเอง แล้วนำมาคูณกับการฉายเชิงสเกลาร์ก็จะได้การฉายเชิงเวกเตอร์ตามต้องการ

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{OC} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\left(\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)$ เป็นการฉายเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

ตัวอย่างที่ 1.16 จากเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในตัวอย่างที่ 1.14 จงหาการฉายเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{v}$ จะได้ว่า $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$

เพราะฉะนั้น การฉายเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\dfrac{8}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}\right) = \dfrac{8}{5}\vec{i}+\dfrac{16}{5}\vec{j}$ ❑

ᏦᏦᏦᏦᏦᏦ

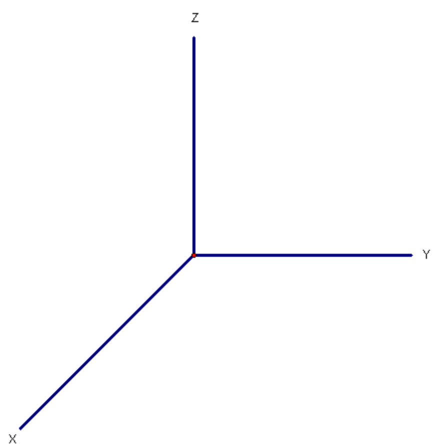
บทที่ 2
เวกเตอร์ 3 มิติ

2.1 ระบบพิกัดฉาก และเวกเตอร์ใน 3 มิติ

2.1.1 ระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

เราได้เคยศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับระบบพิกัดฉากใน 2 มิติมาแล้วในเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ ก่อนที่เราจะศึกษาเกี่ยวกับเวกเตอร์ใน 3 มิติ จำเป็นจะต้องมาศึกษาเกี่ยวกับระบบพิกัดฉากใน 3 มิติกันเสียก่อน

ระบบพิกัดฉาก 3 มิติ เกิดจากเส้นตรง 3 เส้นมาตัดกันเป็นมุมฉากซึ่งกันและกัน ดังรูป



รูป 2.1 ระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

การบอกพิกัดของจุดในพิกัดฉาก 3 มิตินั้นก็เป็นไปในทำนองเดียวกับพิกัดฉาก 2 มิติ กล่าวคือ เป็นการบอกระยะตัดแกน X, Y, Z ของจุดนั้น ตัวอย่างเช่น จุด $(2, 3, -1)$ หมายถึง จุดที่มีระยะตัดแกน X, Y, Z เท่ากับ 2, 3 และ -1 ตามลำดับ

2.1.2 การเขียนเวกเตอร์แทนจุด 2 จุดที่กำหนดให้ใน 3 มิติ

การเขียนเวกเตอร์แทนจุด 2 จุดที่กำหนดให้ใน 3 มิติก็เป็นไปในทำนองเดียวกับเวกเตอร์ใน 2 มิติ กล่าวคือถ้าเรามีจุด $A(x_1, y_1, z_1)$ และ $B(x_2, y_2, z_2)$ แล้วเวกเตอร์ที่แทนส่วนของเส้นตรง AB ได้จากการนำพิกัดของจุด B ลบด้วยพิกัดของจุด A กล่าวคือ $\overrightarrow{AB} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ $A(2, 0, -6)$, $B(0, -1, 4)$ จงหาเวกเตอร์ที่แทนส่วนของเส้นตรง AB และเวกเตอร์ที่แทนส่วนของเส้นตรง BA ตามลำดับ

วิธีทำ $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 4) - (2, 0, -6) = (-2, -1, 10)$

$\overrightarrow{BA} = (2, 0, -6) - (0, -1, 4) = (2, 1, -10)$ ❑

<u>ข้อสังเกต</u>

1. จากตัวอย่างที่ 2.1 จะเห็นได้ว่า $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$
2. เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป (x, y, z) จะกล่าวว่า
   2.1 x เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์ในแนวแกน X
   2.2 y เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์ในแนวแกน Y
   2.3 z เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์ในแนวแกน Z

2.1.3 ขนาดของเวกเตอร์ใน 3 มิติ และการเท่ากันของเวกเตอร์

บทนิยาม 2.1
กำหนดให้ (x, y, z) เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉากใน 3 มิติ แล้วขนาดของเวกเตอร์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|(x, y, z)|$ โดยที่ $|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ตัวอย่างที่ 2.2 จงหาขนาดของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$ ในตัวอย่างที่ 2.1

วิธีทำ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 10^2} = \sqrt{105}$

และ $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-10)^2} = \sqrt{105}$ ❑

บทนิยาม 2.2
เวกเตอร์สองเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติจะเท่ากันก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองไปทางเดียวกันและมีขนาดเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 2.3 จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในตัวอย่างที่ 2.1 เท่ากันหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 10)$ และ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{105}$

และ $\overrightarrow{BA} = (2, 1, -10)$ และ $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{105}$

เมื่อพิจารณาจากบทนิยาม 2.2 จะเห็นได้ว่า เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ไปคนละทางกับเวกเตอร์ $\overrightarrow{BA}$ ถึงแม้ว่าเวกเตอร์ทั้งสองจะมีขนาดเท่ากันก็ตาม จึงสรุปได้ว่า $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ ❑

2.1.4 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน และเวกเตอร์ตำแหน่งใน 3 มิติ

จากการศึกษาในบทที่ 1 เกี่ยวกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน และเวกเตอร์ตำแหน่งใน 2 มิติ เราได้ทราบความหมายตลอดจนตัวอย่างการคำนวณมาแล้ว สำหรับในหัวข้อนี้เราจะได้ศึกษาใน 3 มิติซึ่งก็มีความแตกต่างกันเล็กน้อย

บทนิยาม 2.3

1) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน 3 มิติ หมายถึง เวกเตอร์ใน 3 มิติที่มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย
2) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐานใน 3 มิติ หมายถึง เวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน 3 มิติที่มีทิศทางขนานกับแกนพิกัดฉากใน 3 มิติ
3) เวกเตอร์ตำแหน่งใน 3 มิติ หมายถึง เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นจากจุดกำเนิดในระบบพิกัดฉากใน 3 มิติ และมีจุดปลายอยู่ที่จุดใดๆ ในระบบพิกัดฉาก

หมายเหตุ

1. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน 3 มิติ สามารถหาได้จากการนำขนาดของเวกเตอร์นั้นไปหารส่วนประกอบของเวกเตอร์
2. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐานใน 3 มิติเราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ สำหรับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐานตามแนวแกน X, Y, Z ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 2.4 จงเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ และเวกเตอร์ $\overrightarrow{BA}$ ในตัวอย่างที่ 2.1 ในรูปของผลบวกเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน

วิธีทำ เนื่องจาก $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 10)$ ดังนั้น จะได้ว่า $\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - \vec{j} + 10\vec{k}$

และ $\overrightarrow{BA} = (2, 1, -10)$ ดังนั้น จะได้ว่า $\overrightarrow{BA} = 2\vec{i} + \vec{j} - 10\vec{k}$ ❑

ขอส่งท้ายหัวข้อนี้ด้วยบทนิยาม 2.4 และบทนิยาม 2.5 เกี่ยวกับการหาขนาดของเวกเตอร์ที่อยู่ในรูปการบวกของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน และเวกเตอร์ศูนย์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.4
กำหนดให้ $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + c\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก แล้วขนาดของ $\vec{u}$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $|\vec{u}|$ โดยที่ $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

บทนิยาม 2.5
เวกเตอร์ศูนย์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{0}$ หมายถึง เวกเตอร์ใดๆ ที่มีขนาดเท่ากับศูนย์

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ในตัวอย่างที่ 2.1
2. กำหนดให้ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ถ้าทราบว่า $|\vec{u}| = 3$ และ $ab + bc + ca = 8$ แล้ว $a + b + c$ จะมีค่าเท่ากับเท่าใด

ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ

2.2 การบวกและการลบเวกเตอร์ใน 3 มิติ

บทนิยาม 2.6
กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$, $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก จะได้ว่า

1) $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2)\vec{i} + (b_1 + b_2)\vec{j} + (c_1 + c_2)\vec{k}$

1) $\vec{u} - \vec{v} = (a_1 - a_2)\vec{i} + (b_1 - b_2)\vec{j} + (c_1 - c_2)\vec{k}$

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนดให้ $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ จงหาค่าของ $\vec{u} + \vec{v}$ และ $\vec{u} - \vec{v}$ พร้อมทั้งหาค่าของ $|\vec{u} + \vec{v}|$ และ $|\vec{u} - \vec{v}|$

วิธีทำ $\vec{u} + \vec{v} = (\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) + (2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$

$= 3\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$

ดังนั้น $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$\vec{u} - \vec{v} = (\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}) - (2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$

$= -\vec{i} + \vec{k}$

ดังนั้น $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ❑

แบบฝึกหัด 2.2

1. ถ้าทราบว่า $\vec{u} - \vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ และ $\vec{u} + \vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ จงหา $\vec{u}, \vec{v}$
2. จงแสดงว่า สำหรับ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ มีสมบัติการสลับที่ของการบวก และสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก

ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ

2.3 การคูณเวกเตอร์ใน 3 มิติด้วยสเกลาร์

บทนิยาม 2.7
กำหนดให้ c เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติแล้ว จะได้ว่า $c\vec{u} = cx\vec{i} + cy\vec{j} + cz\vec{k}$

ตัวอย่างที่ 2.6 กำหนดให้ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} + \vec{k}$ และ $c = 4$ แล้ว จงหาค่าของ $c\vec{u}$

วิธีทำ จาก $c\vec{u} = 4\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} + \vec{k}\right)$

$= 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ ❑

<u>**หมายเหตุ**</u> สมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์สำหรับเวกเตอร์ใน 3 มิติ ยังคงเป็นจริงเช่นเดียวกับเวกเตอร์ใน 2 มิติ ผู้อ่านสามารถทบทวนทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องได้จากทฤษฎีบท 1.1

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงแสดงว่าทฤษฎีบท 1.1 เป็นจริงสำหรับเวกเตอร์ใน 3 มิติด้วย
2. จงอธิบายความหมายสำหรับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ สำหรับเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติในเชิงเรขาคณิต

ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ ଓଓ

2.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ใน 3 มิติ

บทนิยาม 2.8
กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$, $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ แล้วผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์แทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ โดยที่ $\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

ตัวอย่างที่ 2.7 กำหนดให้ $\vec{u} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ จงหาค่าของ $\vec{u}\cdot\vec{v}$

วิธีทำ จาก
$$
\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \\
&= (-3)(1) + (-2)(-1) + (1)(-1) \\
&= -3 + 2 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$
❑

ในกรณีที่บอกขนาดของมุมที่เวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่กำหนดให้ทำต่อกัน เราสามารถใช้สมการ $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ ตามบทนิยาม 1.11 ในการหาค่าของ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ได้ทันที ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.8 กำหนดให้ $\vec{u} = 8\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ และ $\vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ จงหาขนาดของมุม θ ซึ่งเป็นมุมที่ $\vec{u}$ ทำกับ $\vec{v}$

วิธีทำ จากสมการ $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

เนื่องจาก $\vec{u}\cdot\vec{v} = (8)(-1) + (-3)(-2) + (4)(-1) = -6$

และ $|\vec{u}| = \sqrt{8^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{89}$, $|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

แทนค่าลงในสมการข้างต้น จะได้ว่า $-6 = \left(\sqrt{89}\right)\left(\sqrt{6}\right)\cos\theta$

ดังนั้น $\cos\theta = \frac{-6}{\sqrt{89}\cdot\sqrt{6}} = \frac{-6}{\sqrt{623}} \approx -0.24$

เพราะฉะนั้น มุม θ ที่ต้องการคือ arccos (– 0.24) ❑

<u>**หมายเหตุ**</u> ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ใน 3 มิติ มีสมบัติเช่นเดียวกับผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ใน 2 มิติ ตามทฤษฎีบท 1.2 ด้วย

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงแสดงว่าทฤษฎีบท 1.2 ยังคงเป็นจริงสำหรับเวกเตอร์ใน 3 มิติ

2.5 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์ใน 3 มิติ

2.5.1 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์ใน 3 มิติ

บทนิยาม 2.9

กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$, $\vec{v} = a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ แล้วผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u}\times\vec{v}$ โดยที่ $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

<u>ข้อสังเกต</u> ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์ มีผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์เสมอ ซึ่งแตกต่างจากผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ซึ่งมีผลลัพธ์เป็นสเกลาร์

สิ่งที่เราสนใจสำหรับการศึกษาเกี่ยวกับผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์ก็คือ ทิศและขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}\times\vec{v}$ โดยที่ทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u}\times\vec{v}$ จะตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{u}$, $\vec{v}$ ซึ่งเป็นไปตามกฎมือขวา (right – hand rule) และขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}\times\vec{v}$ เป็นไปตามสมการ $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ เมื่อ θ คือมุมที่ $\vec{u}$ ทำกับ $\vec{v}$

ตัวอย่างที่ 2.9 กำหนดให้ $\vec{u} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{v} = -\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ จงหา $\vec{u}\times\vec{v}$ และขนาดของมุม θ ซึ่งเป็นมุมที่ $\vec{u}$ ทำกับ $\vec{v}$

วิธีทำ จากสมการ $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ใช้การกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 2 เพื่อหาดีเทอร์มิแนนต์

จะได้ว่า $\vec{u}\times\vec{v} = (-1)\begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= (-1)(\vec{j}-2\vec{k}) + (1)(\vec{i}+\vec{k}) + (-1)(2\vec{i}+\vec{j})$$

$$= -\vec{j}+2\vec{k}+\vec{i}+\vec{k}-2\vec{i}-\vec{j}$$

$$= (-1)\vec{i} + (-1-1)\vec{j} + (2+1)\vec{k}$$

$$= -\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$$

และจากสมการ $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$

เนื่องจาก $|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$$

จะได้ว่า $\sin\theta = \dfrac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{18}} \approx 0.88$

ดังนั้น $\theta = \arcsin(0.88)$ ❑

แบบฝึกหัด 2.5 ก

1. กำหนดให้ $\vec{u} = 2\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ใน 3 มิติ จงหาค่าของ $\vec{u}\times\vec{v}$ พร้อมทั้งหาขนาดของมุม θ ซึ่งเป็นมุมที่ $\vec{u}$ ทำกับ $\vec{v}$
2. จงแสดงว่า เส้นตรง 3 เส้นที่ตัดตั้งฉากซึ่งกันและกัน อันทำให้เกิดพิกัดฉากใน 3 มิตินั้นตั้งฉากซึ่งกันและกันจริง
3. สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}$ ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ โดยที่ $|\vec{u}|, |\vec{v}| \neq 0$ และ $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \neq 0$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}\cdot\vec{v}|} = \tan\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมที่ $\vec{u}, \vec{v}$ กระทำต่อกัน

2.5.2 สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 2.1

กำหนดให้ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ และ $|\vec{u}| \neq 0, |\vec{v}| \neq 0$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1) $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$
2) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$
3) $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} // \vec{v}$
4) $\vec{u} // \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ มุมระหว่าง $\vec{u}, \vec{v}$ เท่ากับ 0
5) $m\vec{u}\times n\vec{v} = mn\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)$ เมื่อ m, n เป็นสเกลาร์
6) $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$
   $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$
   $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$

พิสูจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ขอละไว้ให้ผู้อ่านทำเป็นแบบฝึกหัด ❑

แบบฝึกหัด 2.5 ข

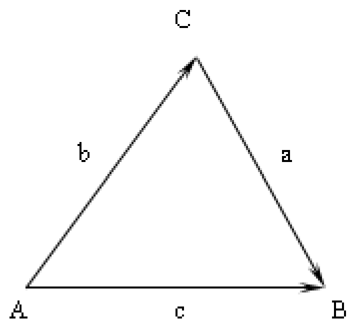
1. จงแสดงว่าทฤษฎีบท 2.1 เป็นจริง
2. ท่านคิดว่า การคูณเวกเตอร์ด้วยเวกเตอร์มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มหรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบของท่าน

บทที่ 3
การประยุกต์เกี่ยวกับเวกเตอร์

บทที่ 3 เป็นบทส่งท้ายสำหรับหนังสือเรียนออนไลน์เล่มนี้ โดยผู้เขียนได้นำมากล่าวไว้ 6 เรื่องด้วยกัน ซึ่งครอบคลุมการนำไปใช้ทั้งในคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์บางสาขา เช่น ฟิสิกส์ เป็นต้น

3.1 การพิสูจน์กฎของโคไซน์

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{AC}$ เป็นด้านที่ประกอบขึ้นเป็นรูปสามเหลี่ยมดังกล่าว โดยมีความยาวด้านละ c, a, b หน่วยตามลำดับ



รูป 3.1 รูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ เป็นด้านประกอบ

จะเห็นได้ว่า $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ ดังนั้น $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}|$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ว่า $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}|^2$

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 + 2(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB})$ (จากสูตรผลคูณเชิงสเกลาร์)

$= |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 - 2(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC})$

จะได้ว่า $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|\cos\theta$ โดยที่ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\overrightarrow{AC}$ และ $\overrightarrow{BC}$

เมื่อแทนค่า $c^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$, $b^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$ และ $a^2 = |\overrightarrow{BC}|^2$ ลงในสมการที่ได้ข้างต้น ก็จะได้ว่า

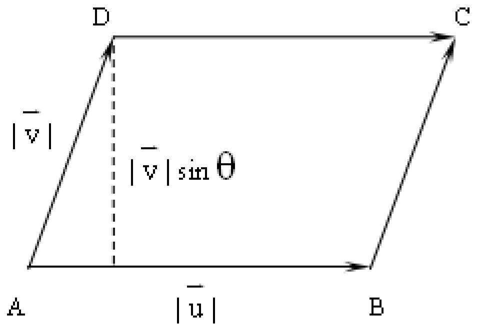
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ ซึ่งเป็นกฎของโคไซน์ตามต้องการ ❑

แบบฝึกหัด 3.1

จงแสดงว่า $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$ และ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta$ เป็นจริง โดยใช้วิธีการของเวกเตอร์

3.2 พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ดังต่อไปนี้



รูป 3.2 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD

จากรูป 3.2 ถ้าให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่แทนส่วนของเส้นตรง AB ในทำนองเดียวกันเราให้ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่แทนส่วนของเส้นตรง AD ดังนั้น

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (A) = ความยาวของฐาน $\times$ ความสูง

$$= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$$

$$= |\vec{u}\times\vec{v}|$$

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้ $\vec{u} = 8\vec{i}$ และ $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ปิดล้อมด้วยเวกเตอร์ทั้งสอง

วิธีทำ จากพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $= |\vec{u}\times\vec{v}|$

$$= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$$

$$= \sqrt{8^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sin\theta$$

$$= 8\cdot 5\cdot\sin\theta$$

$$= 40\cdot\sin\theta \quad \text{-----(3.2.1)}$$

จากสูตร $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{(8)(3)+(0)(4)}{(8)(5)}$

$$= 0.6$$

จะได้ว่า $\sin\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-0.6^2}$

$$= \sqrt{1-0.36}$$

$$= \sqrt{0.64} = 0.8$$

แทนค่า $\sin\theta$ ลงในสมการ (1) ก็จะได้ว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ต้องการ

มีค่าเท่ากับ (40)(0.8) = 32 ตารางหน่วย ❑

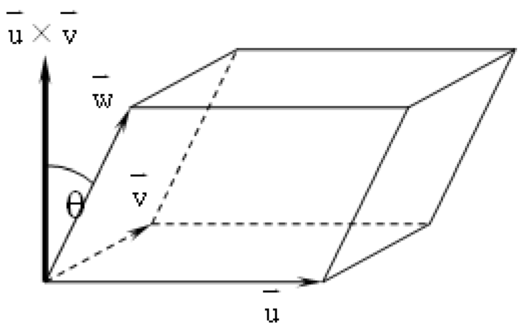
แบบฝึกหัด 3.2

1. กำหนดให้ $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉาก โดยที่ $|\vec{u}| \neq 0$ และ $|\vec{v}| \neq 0$ แล้วจงแสดงว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่ปิดล้อมด้วยเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}$ ที่กำหนดให้ดังกล่าว มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$
2. กำหนดให้ $\vec{u} = 4\vec{j}$ และ $\vec{v} = 5\vec{i}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีเวกเตอร์ที่กำหนดให้ดังกล่าวเป็นด้านประกอบ

ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ ଓ

3.3 ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิจารณารูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานต่อไปนี้



รูป 3.3 รูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD

จากหลักการพื้นฐานในการหาปริมาตรของรูปทรงตันใดๆ จะได้ว่า

ปริมาตร (V) = (พื้นที่ฐาน)(ความสูง)

$$= (|\vec{u} \times \vec{v}|)(|\vec{w}| \cos\theta)$$
$$= |\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}| \cos\theta$$
$$= (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

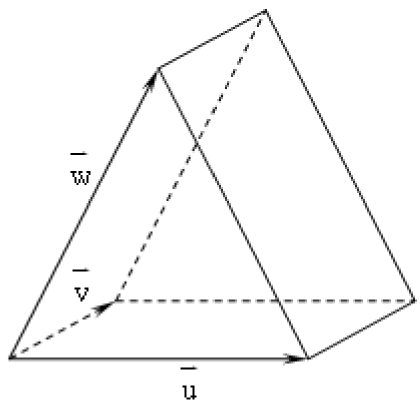
แต่เนื่องจาก $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ อาจมีค่าเป็นลบได้ จึงต้องใส่ค่าสัมบูรณ์เพื่อทำให้เป็นค่าบวก และเป็นปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานตามต้องการ

เพราะฉะนั้น ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นด้านประกอบมีค่าเท่ากับ

$$|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$ ❑

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันดังรูปต่อไปนี้



ɞ ɞ ɞ ɞ ɞ ɞ

3.4 งาน

ในทางฟิสิกส์ "งาน" (work) หมายถึง ผลคูณระหว่างแรง ($\vec{F}$) กับระยะทางตามแนวแรง ($\vec{S}$) ดังนั้น ในทางคณิตศาสตร์ "งาน" จึงหมายถึง ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ของแรงกับเวกเตอร์ของการกระจัดตามแนวแรง เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}$$
$$= |\vec{F}||\vec{S}| \cos\theta$$ เมื่อ θ คือ มุมที่ $\vec{F}$ กับ $\vec{S}$ กระทำต่อกัน

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นเวกเตอร์ของแรง โดยที่ $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ และให้ $\vec{S}$ เป็นเวกเตอร์ของการกระจัด โดยที่ $\vec{S} = 5\vec{i}$ จงหางานของแรง $\vec{F}$

วิธีทำ จากสมการ $W = \vec{F} \cdot \vec{S}$

แทนค่า $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ และ $\vec{S} = 5\vec{i}$ ลงในสมการข้างต้น

จะได้ว่า $W = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \cdot (5\vec{i})$

$= (3)(5) + (4)(0)$

$= 15$ นิวตัน – เมตร ❑

ตัวอย่างที่ 3.3 กำหนดให้ $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ และให้ $\vec{S} = -3\vec{j}$ จงหางานของแรง $\vec{F}$

วิธีทำ จากสมการ $W = \vec{F} \cdot \vec{S}$

แทนค่า $\vec{F}$ และ $\vec{S}$ ที่กำหนดให้แล้ว จะได้ว่า

$$W = (2\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot (-3\vec{j})$$
$$= (2)(0) + (-3)(-3)$$
$$= 9 \text{ นิวตัน – เมตร}$$

❑

ตัวอย่างที่ 3.4 กำหนดให้ $\vec{F} = 6\vec{i}$ และให้ $\vec{S} = -3\vec{i}$ จงหางานของแรง $\vec{F}$

วิธีทำ จากสมการ $W = \vec{F} \cdot \vec{S}$

แทนค่า $\vec{F}$ และ $\vec{S}$ ที่กำหนดให้แล้ว จะได้ว่า

$$W = (6\vec{i}) \cdot (-3\vec{i})$$
$$= (6)(-3) + (0)(0)$$
$$= -18 \text{ นิวตัน – เมตร}$$

❑

ตัวอย่างที่ 3.5 กำหนดให้ $\vec{F} = 12\vec{i}$ และให้ $\vec{S} = 6\vec{j}$ จงหางานของแรง $\vec{F}$

วิธีทำ จากสมการ $W = \vec{F} \cdot \vec{S}$

แทนค่า $\vec{F}$ และ $\vec{S}$ ที่กำหนดให้แล้ว จะได้ว่า

$$W = (12\vec{i}) \cdot (6\vec{j})$$
$$= (12)(0) + (0)(6)$$
$$= 0 \text{ นิวตัน – เมตร}$$

❑

จากตัวอย่างข้างต้น เราสามารถสรุปได้ดังนี้

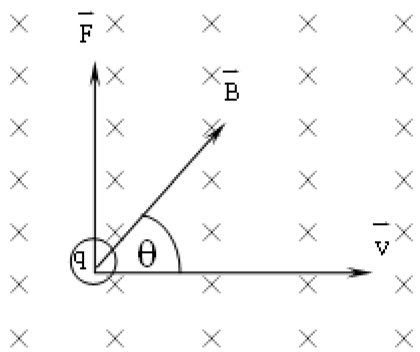
1) ถ้าแรง $\vec{F}$ กับการกระจัด $\vec{S}$ ทำมุมแหลม θ ต่อกันแล้ว งานของแรง $\vec{F}$ มีค่าเป็นบวก
2) ถ้าแรง $\vec{F}$ กับการกระจัด $\vec{S}$ ทำมุมฉาก $\frac{\pi}{2}$ ต่อกันแล้ว งานของแรง $\vec{F}$ มีค่าเป็นศูนย์ นั่นหมายความว่า ไม่เกิดงาน กรณีที่แรงกับการกระจัดตั้งฉากต่อกัน
3) ถ้าแรง $\vec{F}$ กับการกระจัด $\vec{S}$ ทำมุมป้าน $-\pi$ ต่อกันแล้ว งานของแรง $\vec{F}$ มีค่าเป็นลบ นั่นหมายความว่า เป็นงานของแรงเสียดทาน

แบบฝึกหัด 3.4

1. ออกแรงดึง $\vec{F}$ ทำมุม $\frac{\pi}{3}$ กับแนวระดับไปเป็นระยะทาง 10 เมตร จงหางานของการออกแรงดึงดังกล่าว
2. กำหนดให้ $\vec{F} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ของแรงในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ ไปตามการกระจัด $\vec{S} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ บนพื้นเอียงซึ่งทำมุม $\frac{\pi}{3}$ กับแนวระดับ จงหางานของแรง $\vec{F}$

3.5 แรงแม่เหล็กอันเนื่องมาจากการเคลื่อนที่ของประจุในสนามแม่เหล็กคงที่

พิจารณาประจุไฟฟ้า q ซึ่งเคลื่อนที่ในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กความเข้ม $\vec{B}$ ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ ดังรูป



รูป 3.4 ประจุ q เคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็กความเข้ม $\vec{B}$ ด้วยความเร็ว $\vec{v}$

จากรูป 3.4 เรามีประจุ q คูลอมบ์ (Coulomb) กำลังเคลื่อนที่ภายในสนามแม่เหล็กที่มีความเข้ม $|\vec{B}|$ เทสลา (Tesla) ในทิศทางพุ่งเข้าหากระดาษ ด้วยอัตราเร็ว $|\vec{v}|$ เมตร/วินาที เมื่อประจุ q ตัวนี้เคลื่อนที่ไปเรื่อยๆ จะเริ่มเบี่ยงเบนเข้าหากระดาษตามทิศของ $\vec{B}$ ทำให้เกิดแรงแม่เหล็กในทิศทางที่ตั้งฉากกับความเร็ว $\vec{v}$

ดังนั้น จากรูป 3.4 จึงได้ว่า

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}|\sin\theta$$ เมื่อ θ คือ มุมที่ $\vec{v}$ กับ $\vec{B}$ กระทำต่อกัน

ตัวอย่างที่ 3.6 กำหนดให้ $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \sqrt{11}\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ความเร็วของจุดประจุ $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C ซึ่งเคลื่อนที่ภายใต้สนามแม่เหล็กคงที่ $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ จงหาขนาดแรงแม่เหล็กของจุดประจุซึ่งเคลื่อนที่ภายใต้สนามแม่เหล็กดังกล่าว

วิธีทำ จากสมการ $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$$= q|\vec{v}||\vec{B}|\sin\theta$$

$$= (1.6 \times 10^{-19})(\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (\sqrt{11})^2})(\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}) \sin\theta$$

$$= (1.6 \times 10^{-19})(6)(3) \sin\theta$$

$$= 28.8 \times 10^{-19} \sin\theta \quad \text{-----(1)}$$

เนื่องจาก $\vec{B} \cdot \vec{v} = |\vec{B}||\vec{v}| \cos\theta$

$(1)(3) + (2)(-4) + (-2)(\sqrt{11}) = (6)(3) \cos\theta$

$-5 - 2\sqrt{11} = 18 \cos\theta$

ดังนั้น $\cos\theta = \frac{-5 - 2\sqrt{11}}{18} \approx -0.65$ จะได้ว่า $\sin\theta = \sqrt{1 - (-0.65)^2} = 0.76$

แทนค่า $\sin\theta$ ลงในสมการ (1) จะได้ว่า $\vec{F} = 28.8 \times 10^{-19} \times 0.76 = 2.189 \times 10^{-18}$ นิวตัน ❑

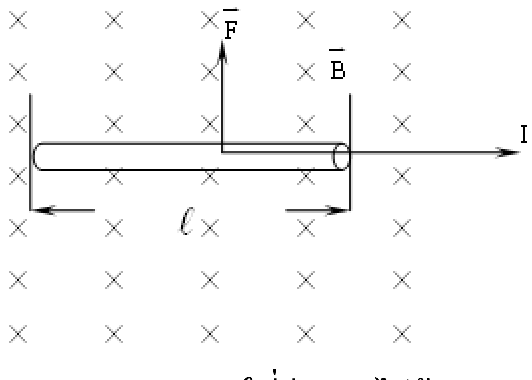
แบบฝึกหัด 3.5

1. จากตัวอย่างที่ 3.6 จงบอกทิศของแรง $\vec{F}$

ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ

3.6 แรงแม่เหล็กอันเนื่องมาจากการไหลของกระแสไฟฟ้าคงที่ในเส้นลวดตัวนำ

พิจารณาเส้นลวดตัวนำที่มีความยาว ℓ เมตร ที่มีกระแสไฟฟ้า I แอมแปร์ (A) วางอยู่ในสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ คงที่ดังรูป



รูป 3.5 เส้นลวดตัวนำความยาว ℓ ที่มีกระแสไฟฟ้า I แอมแปร์ไหลผ่าน

จากรูป 3.5 กระแสไฟฟ้า I แอมแปร์ ไหลผ่านเส้นลวดตัวนำภายใต้สนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ เทสลา เราใช้กฎมือขวาสำหรับ I กับ $\vec{B}$ จะเกิดแรง $\vec{F}$ ในทิศตั้งฉากกับทิศของกระแสไฟฟ้า I จะได้ว่า

$$\vec{F} = I\ell \times \vec{B}$$

$|\vec{F}| = I\ell|\vec{B}|\sin\theta$ เมื่อ θ คือ มุมที่ I กับ $\vec{B}$ กระทำต่อกัน

ตัวอย่างที่ 3.7 กำหนดให้เส้นลวดตัวนำมีความยาว 1 เมตร มีกระแสไฟฟ้าขนาด 1 แอมแปร์ไหลผ่าน ถ้าเส้นลวดตัวนำนี้วางอยู่ภายใต้สนามแม่เหล็กขนาด 0.1 เทสลา และทราบว่าเส้นลวดตัวนำวางตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก จงคำนวณหาขนาดของแรงแม่เหล็กที่เกิดจากการไหลของกระแสไฟฟ้าภายใต้สนามแม่เหล็กดังกล่าว

วิธีทำ จาก $|\vec{F}| = I\ell|\vec{B}|\sin\theta$

$$|\vec{F}| = (1)(1)(0.1)\sin\frac{\pi}{2}$$

$= 0.1$ นิวตัน ❑

แบบฝึกหัด 3.6

1. กำหนดให้ $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ เป็นสนามแม่เหล็กคงที่ ถ้าวางเส้นลวดตัวนำขนาด 0.5 เมตร ไว้ภายใต้สนามแม่เหล็กดังกล่าว แล้วปล่อยกระแสไฟฟ้าคงที่ขนาด 0.1 แอมแปร์ จงคำนวณหาแรงแม่เหล็กอันเนื่องมาจากการไหลของกระแสไฟฟ้าในเส้นลวดตัวนำภายใต้สนามแม่เหล็กคงที่
2. จงบอกทิศของแรงที่คำนวณได้จากข้อ 1

บรรณานุกรม

ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง และศรีบุตร แววเจริญ. **เมตริกซ์ พีชคณิตเชิงเส้น และการประยุกต์**. กรุงเทพฯ : วงตะวัน, ม.ป.ป. 680 หน้า.

วรางคณา ร่องมะรุด. **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 3**. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2544. 296 หน้า.

สมพงษ์ ใจดี. **ฟิสิกส์มหาวิทยาลัย 3**. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2543. 515 หน้า.

หนังสืออิเล็กทรอนิกส์	
ฟิสิกส์ 1(ภาคกลศาสตร์(	ฟิสิกส์ 1 (ความร้อน)
ฟิสิกส์ 2	กลศาสตร์เวกเตอร์
โลหะวิทยาฟิสิกส์	เอกสารคำสอนฟิสิกส์ 1
ฟิสิกส์ 2 (บรรยาย(	แก้ปัญหาฟิสิกส์ด้วยภาษา c
ฟิสิกส์พิศวง	สอนฟิสิกส์ผ่านทางอินเตอร์เน็ต
ทดสอบออนไลน์	วีดีโอการเรียนการสอน
หน้าแรกในอดีต	แผ่นใสการเรียนการสอน
เอกสารการสอน PDF	กิจกรรมการทดลองทางวิทยาศาสตร์
แบบฝึกหัดออนไลน์	สุดยอดสิ่งประดิษฐ์
การทดลองเสมือน	
บทความพิเศษ	ตารางธาตุ)ไทย1) 2 (Eng)
พจนานุกรมฟิสิกส์	ลับสมองกับปัญหาฟิสิกส์
ธรรมชาติมหัศจรรย์	สูตรพื้นฐานฟิสิกส์
การทดลองมหัศจรรย์	ดาราศาสตร์ราชมงคล
แบบฝึกหัดกลาง	
แบบฝึกหัดโลหะวิทยา	แบบทดสอบ
ความรู้รอบตัวทั่วไป	อะไรเอ่ย ?
ทดสอบ)เกมเศรษฐี(	คดีปริศนา
ข้อสอบเอนทรานซ์	เฉลยกลศาสตร์เวกเตอร์
คำศัพท์ประจำสัปดาห์	
ความรู้รอบตัว	
การประดิษฐ์แของโลก	ผู้ได้รับโนเบลสาขาฟิสิกส์
นักวิทยาศาสตร์เทศ	นักวิทยาศาสตร์ไทย
ดาราศาสตร์พิศวง	การทำงานของอุปกรณ์ทางฟิสิกส์
การทำงานของอุปกรณ์ต่าง ๆ	

การเรียนการสอนฟิสิกส์ 1 ผ่านทางอินเตอร์เน็ต

1. การวัด	2. เวกเตอร์
3. การเคลื่อนที่แบบหนึ่งมิติ	4. การเคลื่อนที่บนระนาบ
5. กฏการเคลื่อนที่ของนิวตัน	6. การประยุกต์กฏการเคลื่อนที่ของนิวตัน
7. งานและพลังงาน	8. การดลและโมเมนตัม
9. การหมุน	10. สมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง
11. การเคลื่อนที่แบบคาบ	12. ความยืดหยุ่น
13. กลศาสตร์ของไหล	14. ปริมาณความร้อน และ กลไกการถ่ายโอนความร้อน
15. กฏข้อที่หนึ่งและสองของเทอร์โมไดนามิก	16. คุณสมบัติเชิงโมเลกุลของสสาร
17. คลื่น	18.การสั่น และคลื่นเสียง

การเรียนการสอนฟิสิกส์ 2 ผ่านทางอินเตอร์เน็ต

1. ไฟฟ้าสถิต	2. สนามไฟฟ้า
3. ความกว้างของสายฟ้า	4. ตัวเก็บประจุและการต่อตัวต้านทาน
5. ศักย์ไฟฟ้า	6. กระแสไฟฟ้า
7. สนามแม่เหล็ก	8.การเหนี่ยวนำ
9. ไฟฟ้ากระแสสลับ	10. ทรานซิสเตอร์
11. สนามแม่เหล็กไฟฟ้าและเสาอากาศ	12. แสงและการมองเห็น
13. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ	14. กลศาสตร์ควอนตัม
15. โครงสร้างของอะตอม	16. นิวเคลียร์

การเรียนการสอนฟิสิกส์ทั่วไป ผ่านทางอินเตอร์เน็ต

1. จลศาสตร์)kinematic)	2. จลพลศาสตร์ (kinetics)
3. งานและโมเมนตัม	4. ซิมเปิลฮาร์โมนิก คลื่น และเสียง
5. ของไหลกับความร้อน	6.ไฟฟ้าสถิตกับกระแสไฟฟ้า
7. แม่เหล็กไฟฟ้า	8. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับแสง
9. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ อะตอม และนิวเคลียร์	

ฟิสิกส์ราชมงคล