

บทนำ การเขียนกราฟของข้อมูลที่ได้จากการทดลอง

วัตถุประสงค์การทดลอง

1. เพื่อนำข้อมูลที่ได้จากการทดลองเขียนมาเขียนเป็นกราฟของสมการเส้นตรง วิเคราะห์ผลการทดลองโดยอาศัย ความชัน (Slope) จุดตัดแกน y
2. ฝึกเปลี่ยนรูปสมการซึ่งมีความสัมพันธ์กันแบบไม่เป็นเชิงเส้นให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้น
3. ฝึกพล็อตกราฟโดยใช้กระดาษกราฟแบบ semi - log หรือ log - log และวิเคราะห์ผลการทดลองโดยอาศัย ความชัน (Slope) และจุดตัดแกน y

ทฤษฎี

ตอนที่ 1 การเขียนกราฟบนกระดาษกราฟสเกลปกติ

การทดลองทางวิทยาศาสตร์ที่มีการวัดปริมาณ 2 ปริมาณ ต้องการหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณทั้งสอง การเขียนกราฟเป็นวิธีการหนึ่งซึ่งจะช่วยให้ผู้ทดลองมองเห็นความสัมพันธ์ของทั้งสองได้ง่ายและชัดเจน ในเบื้องต้นนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ x และปริมาณ y หรือมีตัวแปรอยู่ 2 ตัวแปร โดยที่ปริมาณ y จะแปรค่าตามปริมาณ x เรียกค่า x ว่าเป็นตัวแปรอิสระ (Independent variable) ค่า y เป็นตัวแปรตาม (Dependent variable) ข้อมูลที่ได้จากการทดลองวิทยาศาสตร์อาจขึ้นอยู่กับตัวแปรหลาย ๆ ตัวแปร เช่นความดันของแก๊สในกระบอกสูบขึ้นอยู่กับปริมาตรของกระบอกสูบและอุณหภูมิของแก๊ส กระแสไฟฟ้าในวงจรที่ประกอบด้วยตัวต้านทานและตัวเก็บประจุ จะแปรค่าตามเวลา และค่าความต้านทานของวงจร ความต้านทานของวงจรจะมีค่ามากขึ้น ถ้าอุณหภูมิแวดล้อมสูงขึ้น ในทางปฏิบัติ เราอาจจัดตัวแปรอิสระให้เหลือเพียงตัวแปรเดียวได้โดยให้ตัวแปรอิสระอื่น ๆ มีค่าคงที่ เช่นวัดความดันของแก๊ส ให้ปริมาตรของลูกสูบเปลี่ยนค่า โดยที่ให้อุณหภูมิของแก๊สมีค่าคงที่ตลอดการทดลอง

ตอนที่ 1.1 เมื่อปริมาณทั้งสองมีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง

เมื่อตรวจสอบกับทฤษฎีพบว่าปริมาณ x และ y มีความสัมพันธ์ในลักษณะเชิงเส้น ตามสมการ

$$y = ax + b \tag{1}$$

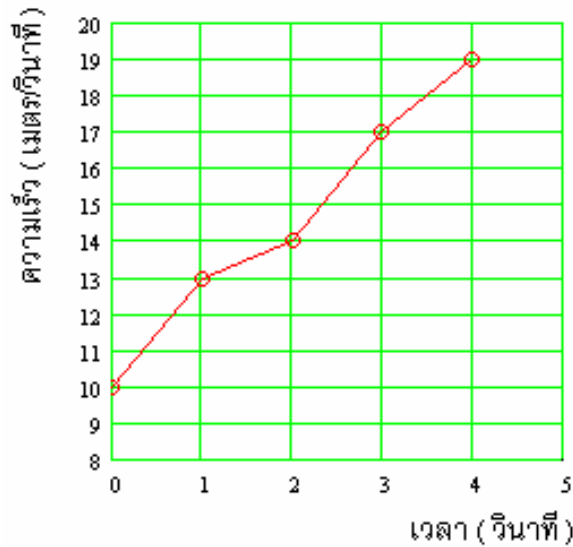
เมื่อ a คือความชัน(Slope) และ b คือจุดตัดแกน y ($y - intercept$) ปริมาณทางฟิสิกส์ที่มีความสัมพันธ์กันเชิงเส้นตรง ได้แก่

$v = u + at$	สมการความเร็วของอนุภาคที่มีความเร่งคงที่ a มีความเร็วต้น u
$F = -kx$	แรงคืนตัวของสปริง (F) จะแปรผันกับระยะที่ยืด (x) และ k คือค่าคงที่ของสปริง
$L = L_0(1 + \alpha t)$	แท่งโลหะยาว L ความยาวจะเปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ T เมื่อ α คือสัมประสิทธิ์การขยายตัวเชิงเส้น L_0 คือความยาวเดิมของแท่งโลหะที่อุณหภูมิเริ่มต้น
$V = IR$	ความต่างศักย์ที่ตกคร่อมตัวต้านทาน R จะแปรผันตรงตามกระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทาน

ตัวอย่างที่ 1 จากการทดลองวัดความเร็วของอนุภาคที่เวลาใด ๆ เพื่อตรวจสอบสมการ $v = u + at$ ได้ผลการทดลองออกมาดังนี้

t (วินาที)	0	1	2	3	4
v (เมตร/วินาที)	10	13	14	17	19

เมื่อนำข้อมูลไปพล็อตเป็นกราฟ ให้ t เป็นแกน x และ v เป็นแกน y จะได้กราฟดังรูปที่ 1 จุดต่าง ๆ จะไม่เรียงกันเป็นเส้นตรงตามทฤษฎี ซึ่งอาจเกิดจากความคลาดเคลื่อนซึ่งเกิดขึ้นระหว่างทำการทดลอง เส้นที่ลากผ่านจุดต่าง ๆ จะไม่เป็นเส้นตรง ถึงแม้ว่าจะเกิดจากเส้นตรง 4 เส้นต่อกันก็ตาม



รูปที่ 1

การหาความชันของเส้นตรง นักศึกษามักจะใช้วิธีหาผลต่างระหว่างจุด 2 จุด เช่น

$$\text{slope} = \frac{19-10}{4-0} = 2.25$$

หรือ
$$\text{slope} = \frac{14-13}{2-1} = 1$$

หรือ
$$\text{slope} = \frac{19-14}{4-2} = 2.5$$

ความชันของเส้นตรงจะต้องมีค่าคงที่ การเขียนกราฟวิธีนี้จึงเป็นวิธีไม่ถูกต้อง จะต้องหาเส้นตรงซึ่งเป็นตัวแทนของข้อมูลชุดนี้ ทำได้โดยใช้ไม้บรรทัดลากเส้นผ่านจุดต่าง ๆ เส้นตรงนี้ไม่จำเป็นต้องผ่านจุดทุกจุด แต่ควรให้ผ่านจุดมากที่สุด หรือทำให้ค่าแตกต่างของข้อมูลที่ได้จากการทดลองกับค่า y ที่ได้จากเส้นตรงเส้นนี้มีค่าน้อยที่สุด หรือเป็นศูนย์

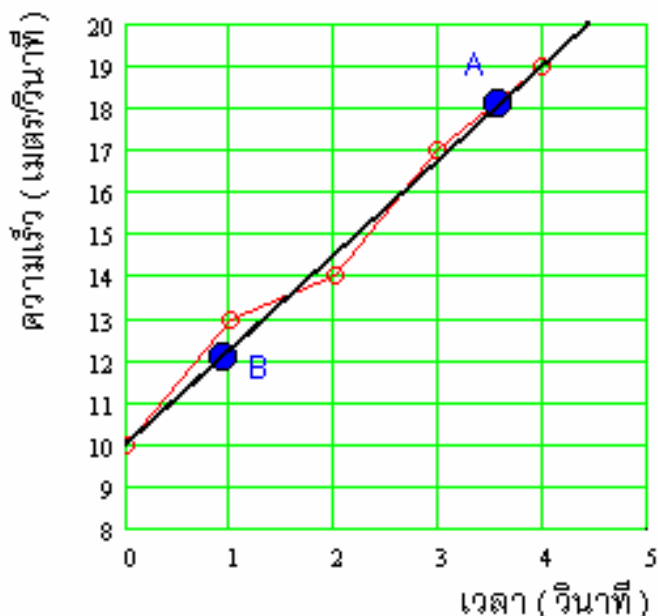
ให้ $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ เป็นข้อมูลที่ได้จากการทดลอง ให้ $y_0', y_1', y_2', y_3', \dots, y_n'$ เป็นค่าที่ได้จากเส้นตรงที่เราใช้เป็นตัวแทนของข้อมูล D_i คือผลต่างระหว่างค่า y_i

และ y_i' หรือเป็นส่วนเบี่ยงเบนที่อยู่ใต้เส้นหรือเหนือเส้นตรง เพื่อที่จะขจัดเครื่องหมายลบ จึงยกกำลังสองของผลต่างแต่ละตัวแล้วนำมารวมกันเส้นตรงที่เราลากนี้จะต้องทำให้ มีค่าน้อยที่สุด เส้นตรงที่ได้จากการคาดคะเนด้วยสายตาจะได้ ดังรูปที่ 2

$$\sum_{i=1}^n D_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i')^2 \tag{1}$$

เมื่อหาค่าความชันของเส้นตรงที่ใช้เป็นตัวแทนของข้อมูลชุดนี้ โดยเลือกจุด A (3.5, 18) และจุด B (1, 12) ที่อยู่บนเส้นตรงที่เราสร้างขึ้นมา (เส้นทึบ) จะได้

$$\begin{aligned} \text{slope} &= \frac{18-12}{3.5-1} \\ &= 2.4 \frac{\text{เมตร/วินาที}}{\text{วินาที}} \end{aligned}$$



รูปที่ 2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลา

ถ้าให้นักศึกษาแต่ละคนลากเส้นตรงที่เป็นตัวแทนของข้อมูลนี้ พบว่าจะได้เส้นตรงที่มีค่าความชันไม่เท่ากัน ขึ้นอยู่กับการคาดคะเนของแต่ละคน

วิธีการที่จะหาเส้นตรงเส้นที่เป็นตัวแทนของข้อมูลชุดเดียวกันนี้ ได้ตรงกันทุกคน ทำได้โดยอาศัยหลักที่ว่า เส้นตรงนี้ทำให้ $\sum D_i^2$ มีค่าน้อยที่สุด วิธีนี้เรียกว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Method of least Square) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า การถดถอยเชิงเส้น (Linear Regression)

ให้ a, b เป็นความชันและจุดตัดแกน y ของสมการเส้นตรงที่ใช้ประมาณค่าชุดข้อมูลที่ได้จากการทดลอง n ค่า สามารถคำนวณหา a และ b ได้จาก

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \tag{2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \tag{3}$$

เมื่อ \bar{x} และ \bar{y} คือค่าเฉลี่ยของข้อมูล x และ y ตามลำดับ

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

ที่มาของสมการ (2) และ (3) จะไม่กล่าวถึงในที่นี้ นักศึกษาสามารถหาอ่านได้จากหนังสือสถิติทั่วไป ในหัวข้อ Simple linear regression

ดังนั้นถ้าต้องการหาสมการเส้นตรงที่เป็นตัวแทนของข้อมูลในตัวอย่างที่ 1 ทำได้โดยตีตารางเพื่อหาค่าทางสถิติดังนี้

t (s) เป็นแกน x	v (m/s) เป็นแกน y	xy	x ²
0	10	0	0
1	13	13	1
2	14	28	4
3	17	51	9
4	19	76	16
$\Sigma x = 10$	$\Sigma y = 73$	$\Sigma xy = 168$	$\Sigma x^2 = 30$

จะได้ $\bar{x} = \frac{10}{5} = 2$

และ $\bar{y} = \frac{73}{5} = 14.6$

$$a = \frac{168 - (5)(2)(14.6)}{30 - (5)(2)^2} = 2.2$$

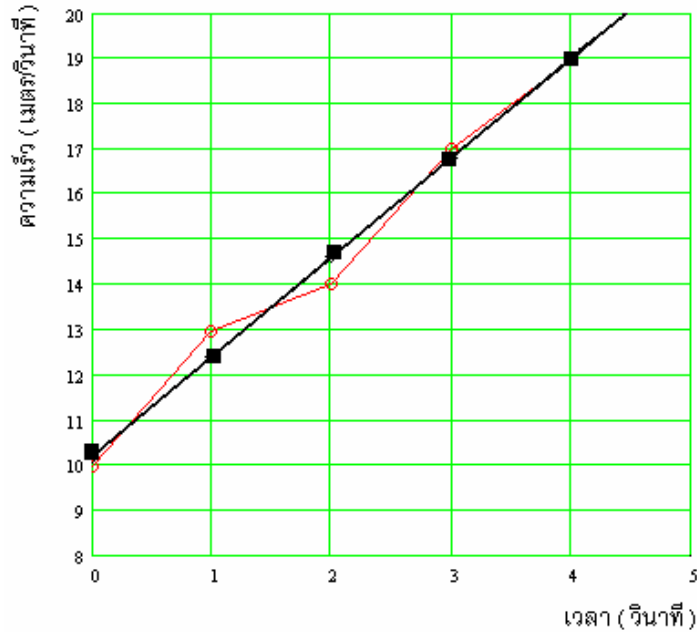
$$b = 14.6 - (2.2)(2) = 10.2$$

สมการเส้นตรงที่ใช้เป็นตัวแทนข้อมูลชุดนี้คือ

$y = 10.2 + 2.2x$

หรือ $v = 10.2 + 2.2t$

นำสมการที่ได้ไปเขียนกราฟ เมื่อ t = 0 จะได้ v = 10.2 เมื่อ t = 4 จะได้ v = 19 เส้นกราฟจะผ่านจุดข้อมูลที่พล็อตไว้ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลา

เส้นสีดำคือเส้นตรงของสมการ

$$v = 10.2 + 2.2 t$$

ซึ่งเป็นตัวแทนที่ดีที่สุดของข้อมูลชุดนี้ ความชันของเส้นตรงคือ 2.2 นั่นคือ ความเร่งของอนุภาคมีค่า เท่ากับ 2.2 m/s^2 ซึ่งคงที่ตลอดการเคลื่อนที่ โดยมีความเร็วต้นเท่ากับ 10.2 m/s

อุปกรณ์ประกอบการทดลอง

1. เครื่องคิดเลขที่มีฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์
2. ดินสอ ยางลบ ไม้บรรทัด

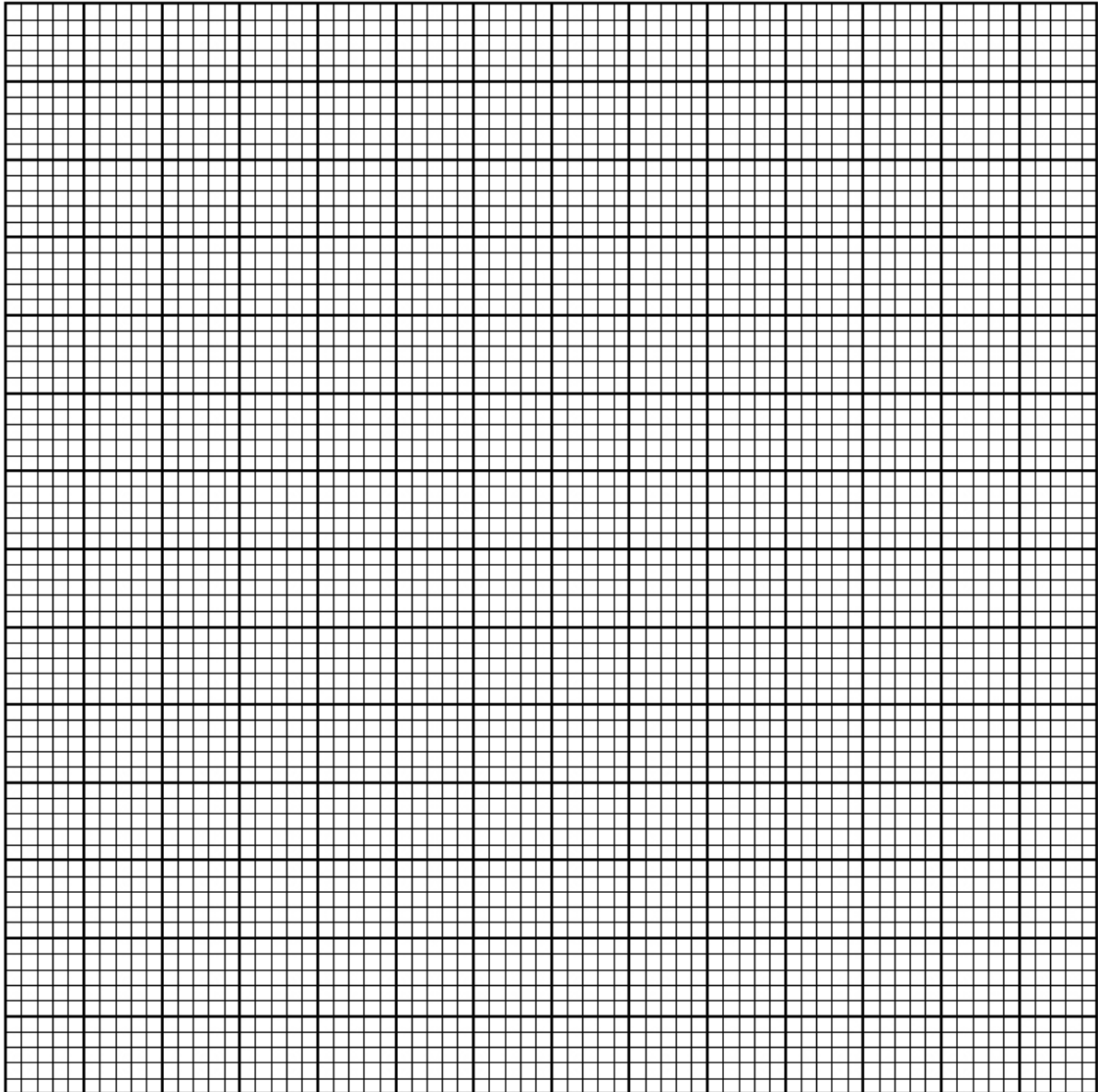
วิธีการทดลอง

ให้นักศึกษาใช้ข้อมูลต่อไปนี้ในการเขียนกราฟ

จากการทดลองเขวอนตุ้มน้ำหนักบนสปริง วัดแรงที่ยึดสปริงเป็นนิวตัน (y) วัดระยะที่สปริงยืดจากตำแหน่งสมดุลเป็น เมตร (x) ได้ข้อมูลดังนี้

x	0.71	0.77	0.83	0.90	0.95	1.02
y	0.981	1.962	2.943	3.924	4.905	5.886

1.1 จงพล็อตจุดต่าง ๆ ลงบนกระดาษกราฟ จากนั้นลากเส้นตรงที่เป็นตัวแทนของข้อมูลชุดนี้โดยใช้สายตาคาดคะเน



ความชันของเส้นตรง = จุดตัดแกน y =
สมการเส้นตรงที่ได้จากกราฟรูปนี้คือ $y = \dots\dots\dots x + \dots\dots\dots$

ตัวอย่างการคำนวณ

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ตอนที่ 1.2 เมื่อปริมาณทั้งสองมีความสัมพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้น

ตัวอย่างสมการแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่พบในวิชาฟิสิกส์

$v = \frac{gm}{c}(1 - e^{-cm/t})$	สมการความเร็วของมวล m ตกอย่างอิสระภายใต้สนามโน้มถ่วง g มีแรงต้านอากาศ ซึ่งมีค่า ส.ป.ส. แรงต้านอากาศ = c
$pv^\gamma = c$	สมการความดันและปริมาตรของแก๊สอุดมคติ ในกระบวนการ adiabatic
$F = \frac{GMm}{r^2}$	สมการแรงดึงดูดระหว่างมวล M และ m
$N = N_0 e^{-at}$	สมการการสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสี
$h = ut + 0.5gt^2$	ระยะที่วัตถุตกอย่างอิสระภายใต้แรง g

กราฟของสมการเหล่านี้จะไม่เป็นเส้นตรง แต่สมการเหล่านี้สามารถเปลี่ยนรูปสมการให้อยู่ในรูปเชิงเส้น แล้วนำไปพล็อตเป็นกราฟสมการเส้นตรงได้

สมการแบบไม่เป็นเชิงเส้น	จัดรูปสมการใหม่	เปลี่ยนให้เป็นสมการเส้นตรง
$y = A \ln x + B$		ให้ $X = \ln x$ จะได้ $y = AX + B$
$y = b e^{ax}$	ใส่ log ทั้งสองข้าง $\ln y = \ln b + ax$	ให้ $Y = \ln y$ $B = \ln b$ จะได้ $Y = B + ax$
$y = b x^a$	ใส่ log ทั้งสองข้าง $\ln y = \ln b + a \ln x$	ให้ $Y = \ln y$ $B = \ln b$ $X = \ln x$ จะได้ $Y = B + aX$
$y = \frac{b}{a+x}$	$y = \frac{b}{a} - \frac{1}{a}(xy)$	ให้ $X = xy$ $B = b/a$ $A = -1/a$ จะได้ $y = B + AX$
$y = \frac{bx}{a+x}$	$y = b - a \frac{y}{x}$	ให้ $X = y/x$ จะได้ $y = b - aX$

วิธีการทดลอง

2.1 ให้นักศึกษาเปลี่ยนสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้น เพื่อนำไปพล็อตเป็นกราฟสมการเส้นตรงได้

$\frac{N}{N_0} = e^{-at}$
$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$
$pv^r = c$
$h = \frac{1}{2}gt^2$
$y = 0.25x^{3.5}$
$F = \frac{GMm}{r^2}$

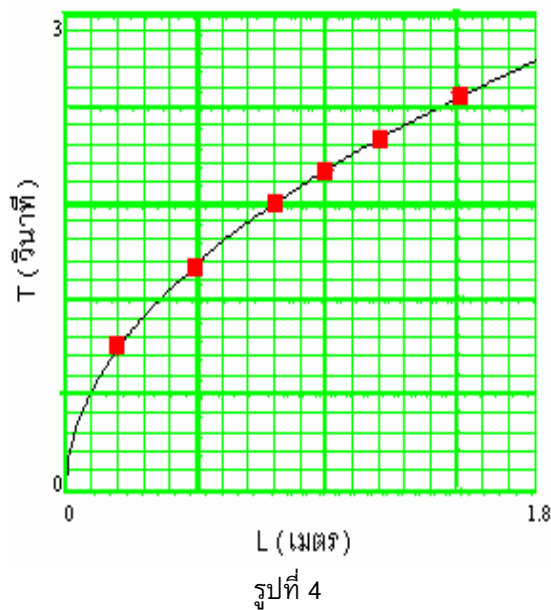
2.2 จงพล็อตกราฟจากข้อมูลต่อไปนี้ เมื่อนำลูกตุ้มมาพิก้าผูกกับเชือกที่มีความยาว L คาบการแกว่ง T ผลการทดลองมีดังนี้

L(m)	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.5
T(s)	0.9	1.4	1.8	2	2.2	2.5

คาบการแกว่งของลูกตุ้มมาพิก้าจะเป็นฟังก์ชัน กับความยาวของเชือกดังนี้

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

เมื่อพล็อตกราฟให้ T เป็นแกนตั้ง ให้ L เป็นแกนนอนจะได้กราฟเป็นรูปพาราโบลา ดังรูปที่ 4



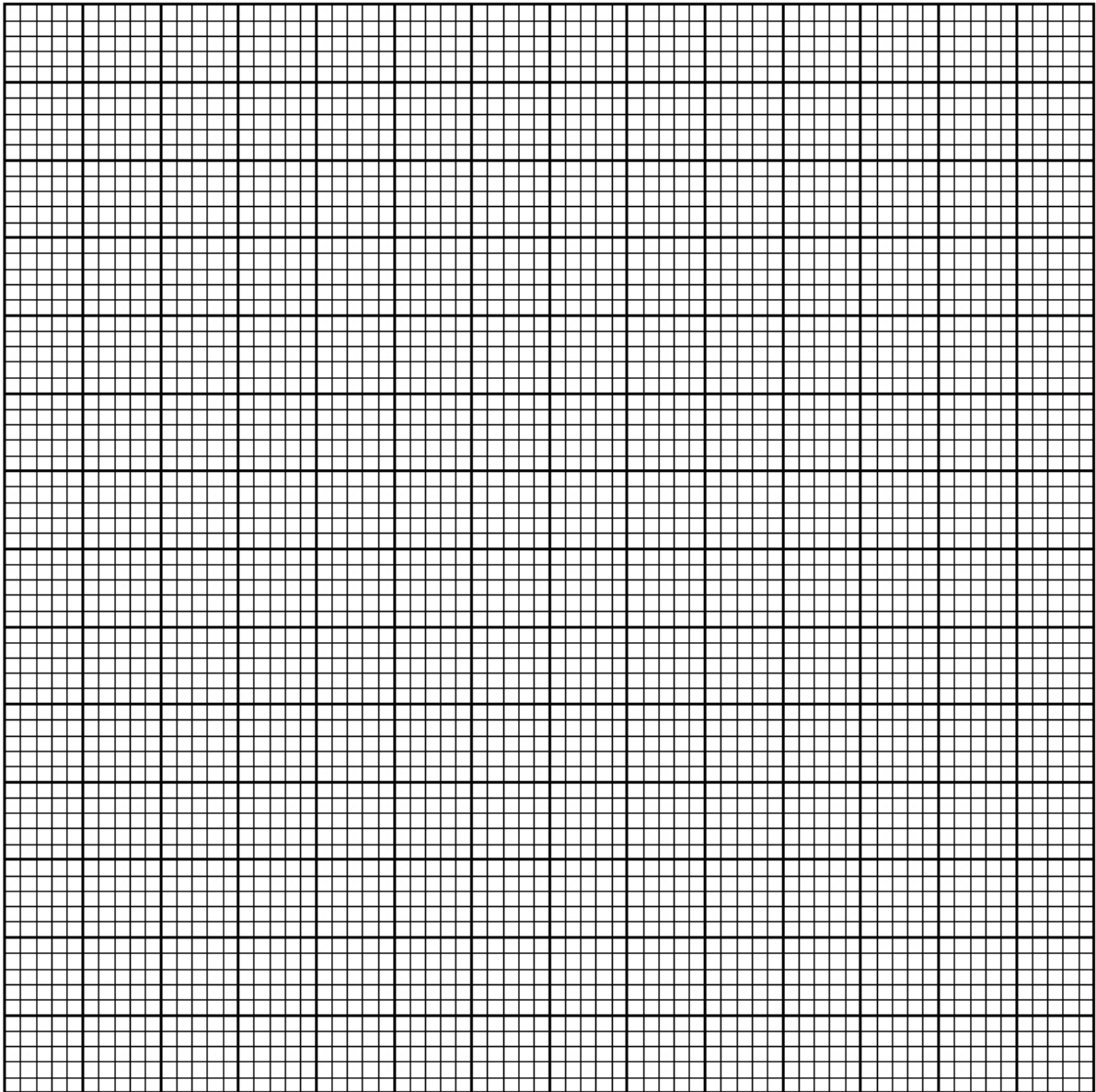
ให้นักศึกษานำข้อมูลเหล่านี้พล็อตเป็นกราฟสมการเส้นตรง โดยขั้นแรก เปลี่ยนรูปสมการเสียใหม่ โดยยกกำลังสอง ทั้งสองข้างแล้วจะเป็นดังนี้

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$$

ให้ $y = T^2$ และ $x = L$ จะได้ $y = \frac{4\pi^2}{g} x$ ซึ่งอยู่ในรูปของสมการเส้นตรงนำข้อมูลมาเขียนเป็นตาราง เพื่อให้ดูง่ายจะได้ดังนี้

L หรือ x	T	T^2 หรือ y
0.2	0.9	0.81
0.5	1.4	1.96
0.8	1.8	3.24
1.0	2.0	4.0
1.2	2.2	4.84
1.5	2.5	6.25

กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง L เป็นแกน x และ T^2 เป็น แกน y



ก) ลากเส้นตรงที่เป็นตัวแทนของข้อมูลผ่านจุดต่าง ๆ โดยการคาดคะเน หาความชันของเส้นตรงนี้

$$\text{slope} = \dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots$$

จากความชันสามารถคำนวณหาค่า g ได้ จาก

$$g = \dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots$$

ข) ใช้วิธี linear regression หาสมการเส้นตรงที่เหมาะสม (fit) กับข้อมูลชุดนี้ จะได้

L หรือ x	T	T^2 หรือ y				
0.2	0.9	0.81				
0.5	1.4	1.96				
0.8	1.8	3.24				
1.0	2.0	4.00				
1.2	2.2	4.84				
1.5	2.5	6.25				

$$n = \dots\dots\dots$$

$$\bar{x} = \dots\dots\dots$$

$$\bar{y} = \dots\dots\dots$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \dots\dots\dots$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = \dots\dots\dots$$

สมการเส้นตรงที่เป็นตัวแทนข้อมูลชุดนี้ คือ

$$y = \dots\dots\dots x + \dots\dots\dots$$

เราสามารถหาค่า g จากความชันได้ดังนี้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....อาจารย์

หนังสืออิเล็กทรอนิกส์	
ฟิสิกส์ 1(ภาคกลศาสตร์(ฟิสิกส์ 1 (ความร้อน)
ฟิสิกส์ 2	กลศาสตร์เวกเตอร์
โลหะวิทยาฟิสิกส์	เอกสารคำสอนฟิสิกส์ 1
ฟิสิกส์ 2 (บรรยาย(แก้ปัญหาฟิสิกส์ด้วยภาษา C
ฟิสิกส์พิศวง	สอนฟิสิกส์ผ่านทางอินเทอร์เน็ต
ทดสอบออนไลน์	วิดีโอการเรียนการสอน
หน้าแรกในอดีต	แผ่นใสการเรียนการสอน
เอกสารการสอน PDF	กิจกรรมการทดลองทางวิทยาศาสตร์
แบบฝึกหัดออนไลน์	สุดยอดสิ่งประดิษฐ์
การทดลองเสมือน	
บทความพิเศษ	ตารางธาตุไทย1) 2 (Eng)
พจนานุกรมฟิสิกส์	ลับสมองกับปัญหาฟิสิกส์
ธรรมชาติมหัศจรรย์	สูตรพื้นฐานฟิสิกส์
การทดลองมหัศจรรย์	ดาราศาสตร์ราชมงคล
แบบฝึกหัดกลาง	
แบบฝึกหัดโลหะวิทยา	แบบทดสอบ
ความรู้รอบตัวทั่วไป	อะไรเอ่ย ?
ทดสอบ)เกมเศรษฐี(คติปริศนา
ข้อสอบเอนทรานซ์	เฉลยกลศาสตร์เวกเตอร์
คำศัพท์ประจำสัปดาห์	
ความรู้รอบตัว	
การประดิษฐ์ของโลก	ผู้ได้รับโนเบลสาขาฟิสิกส์
นักวิทยาศาสตร์เทศ	นักวิทยาศาสตร์ไทย
ดาราศาสตร์พิศวง	การทำงานของอุปกรณ์ทางฟิสิกส์
การทำงานของอุปกรณ์ต่าง ๆ	

● การเรียนการสอนฟิสิกส์ 1 ผ่านทางอินเทอร์เน็ต ●	
1. การวัด	2. เวกเตอร์
3. การเคลื่อนที่แบบหนึ่งมิติ	4. การเคลื่อนที่บนระนาบ
5. กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน	6. การประยุกต์กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน
7. งานและพลังงาน	8. การดลและโมเมนตัม
9. การหมุน	10. สมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง
11. การเคลื่อนที่แบบคาบ	12. ความยืดหยุ่น
13. กลศาสตร์ของไหล	14. ปริมาณความร้อน และ กลไกการถ่ายโอนความร้อน
15. กฎข้อที่หนึ่งและสองของเทอร์โมไดนามิก	16. คุณสมบัติเชิงโมเลกุลของสสาร
17. คลื่น	18. การสั่น และคลื่นเสียง
● การเรียนการสอนฟิสิกส์ 2 ผ่านทางอินเทอร์เน็ต ●	
1. ไฟฟ้าสถิต	2. สนามไฟฟ้า
3. ความกว้างของสายฟ้า	4. ตัวเก็บประจุและการต่อตัวต้านทาน
5. ศักย์ไฟฟ้า	6. กระแสไฟฟ้า
7. สนามแม่เหล็ก	8. การเหนี่ยวนำ
9. ไฟฟ้ากระแสสลับ	10. ทรานซิสเตอร์
11. สนามแม่เหล็กไฟฟ้าและเสาอากาศ	12. แสงและการมองเห็น
13. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ	14. กลศาสตร์ควอนตัม
15. โครงสร้างของอะตอม	16. นิวเคลียร์
● การเรียนการสอนฟิสิกส์ทั่วไป ผ่านทางอินเทอร์เน็ต ●	
1. จลศาสตร์ (kinematic)	2. จลพลศาสตร์ (kinetics)
3. งานและโมเมนตัม	4. ซิมเปิลฮาร์โมนิก คลื่น และเสียง
5. ของไหลกับความร้อน	6. ไฟฟ้าสถิตกับกระแสไฟฟ้า
7. แม่เหล็กไฟฟ้า	8. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับแสง
9. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ อะตอม และนิวเคลียร์	

