

### บทที่ 3 กฎของเกาส์

ในบทเรียนจะประกอบด้วยหัวข้อดังนี้

- 3.1 คำจำกัดความของฟลักซ์ไฟฟ้า
- 3.2 กฎของเกาส์
- 3.3 ตัวอย่างการใช้กฎของเกาส์
- 3.4 สนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นตัวนำคู่ขนานที่มีประจุเท่ากันและเป็นชนิดเดียวกัน

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม หลังจากที่คุณเรียนได้ทำการศึกษาเรื่องนี้จะสามารถ

1. อธิบายฟลักซ์ไฟฟ้าได้อย่างถูกต้อง
2. อธิบายกฎของเกาส์ได้อย่างถูกต้อง
3. สามารถใช้กฎของเกาส์หาค่าสนามไฟฟ้าได้อย่างถูกต้อง

#### 3.1 คำจำกัดความของฟลักซ์ไฟฟ้า

1. ที่หน้าจอหลักคลิกที่ “คำจำกัดความของฟลักซ์ไฟฟ้า” จะปรากฏหน้าจอ ดังรูป

Address: G:\e\_learning\image\_gauss\gauss3-1.htm

**บทที่ 3 กฎของเกาส์**

**3.1 คำจำกัดความของฟลักซ์ไฟฟ้า**

ความเข้มสนามไฟฟ้า คือจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าที่ตกตั้งฉากต่อหน่วยพื้นที่ โดยจำนวนสนามไฟฟ้าที่ผ่านพื้นที่เรียกว่า "ฟลักซ์ไฟฟ้า" ดังรูปที่ 3.1

รูปที่ 3.1

ฟลักซ์ไฟฟ้า หมายถึงจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าที่ผ่านพื้นที่ผิวซึ่งเป็นผิวปิด หรือผิวเปิดใด ๆ (รูปที่ 3.2) ก็ได้ ฟลักซ์ไฟฟ้ามีหน่วยเป็น นิวตันตารางเมตรต่อคูลอมบ์ ( $\text{Nm}^2/\text{C}$ ) ดังนั้นฟลักซ์ไฟฟ้าคำนวณได้ดังนี้

2. จากภาพหน้าจอแสดงฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านพื้นที่แต่ละแบบ โดยสมการการหาฟลักซ์ที่ผ่านพื้นที่เป็นดังรูป

พื้นที่ผิวปิด

รูปที่ 3.2

ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวปิดคือ

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int EdA(\cos \theta)$$

เมื่อ  $\theta$  คือมุมระหว่างเวกเตอร์พื้นที่  $dA$  กับสนามไฟฟ้า

ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวเปิดคือ

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int EdA(\cos \theta)$$

กรณีสนามไฟฟ้ามีค่าสม่ำเสมอและผ่านพื้นที่  $A$  จะได้ว่า

$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

$$= EA(\cos \theta)$$

ฟลักซ์ไฟฟ้ามีหน่วยเป็นนิวตันตารางเมตรต่อคูลอมบ์ ( $\text{Nm}^2/\text{C}$ )

ตัวอย่างที่ 3.1

คลิกเพื่อแสดง ตัวอย่างที่ 3.1

<< ก่อนหน้านี้ | หน้าแรก | หน้าต่อไป >>

3. ถ้าต้องการศึกษาตัวอย่างฟลักซ์ไฟฟ้าในหัวข้อนี้ สามารถคลิกที่ปุ่ม “ ตัวอย่างที่ 3.1 ” จะปรากฏจอท้ยตัวอย่างพร้อมทั้งแสดงวิธีทำ ดังรูป

ตัวอย่างที่ 3.1 จงหาฟลักซ์ไฟฟ้าที่เกิดจากจุดประจุไฟฟ้า  $Q$  ที่วางอยู่ที่จุด  $(0,0,0)$  ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของทรงกลมรัศมี  $r$


คลิกเพื่อกลับไปก่อนหน้า

วิธีทำ แบ่งพื้นที่ออกเป็นพื้นทีเล็ก ๆ  $dA$  เมื่อ  $dA = r^2 \sin \theta (d\theta) (d\phi) \vec{e}_r$  แต่สนามไฟฟ้าที่เกิด จากจุดประจุ  $Q$  ที่ระยะ  $r$  คือ  $\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \vec{e}_r$  ดังนั้นฟลักซ์ไฟฟ้าทั้งหมดคือ

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int \left( \frac{kq}{r^2} \vec{e}_r \right) \cdot (r^2 \sin \theta (d\theta) (d\phi) \vec{e}_r)$$

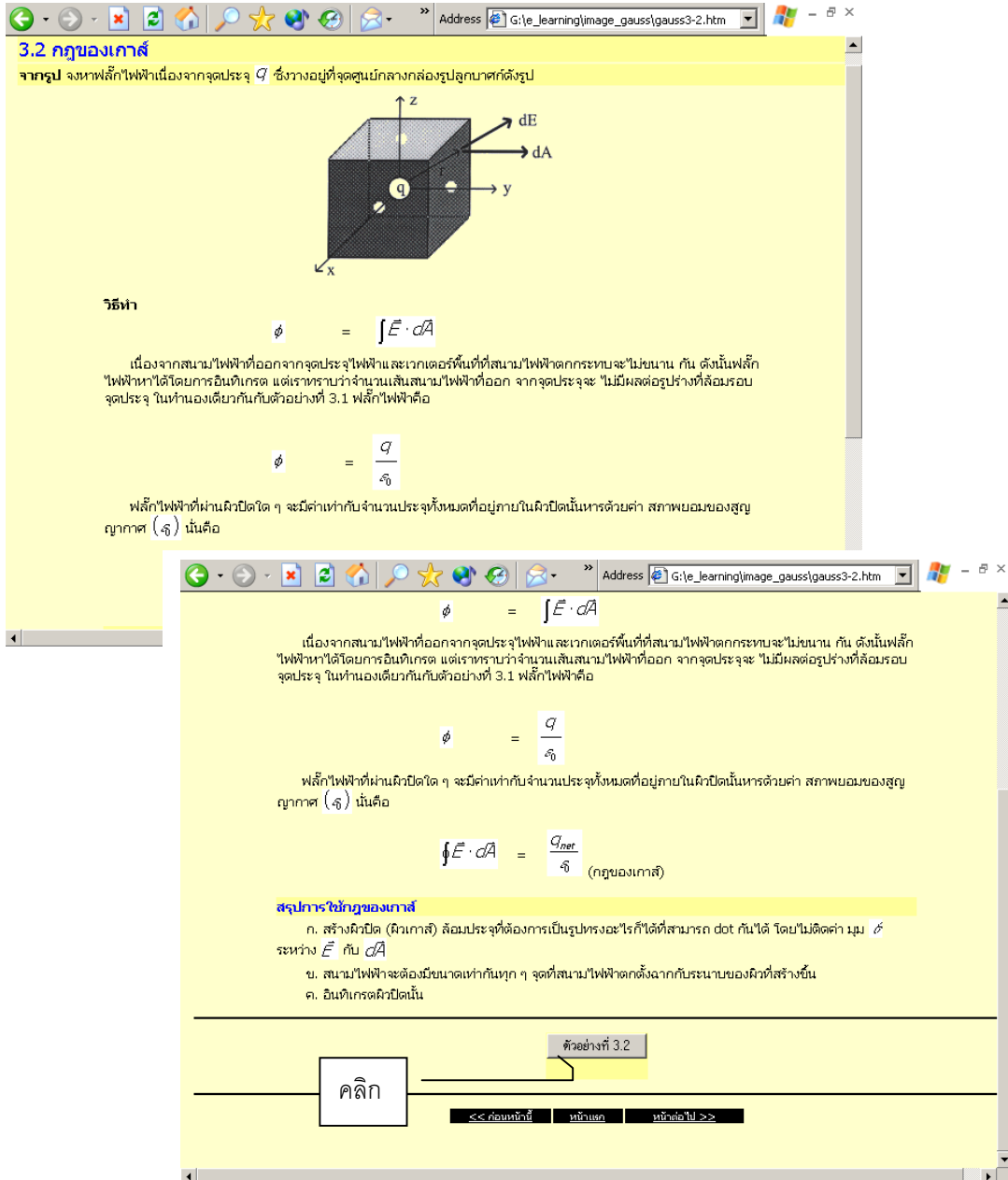
$$= kq \int_0^\pi \sin \theta (d\theta) \int_0^{2\pi} d\phi$$

4. คลิกที่ปุ่ม  สีเขียวด้านบนมุมซ้าย จะกลับไปหน้าจอก่อนหน้านี้

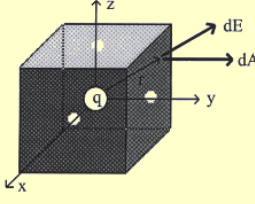
3.2 กฎของเกาส์

คลิกปุ่ม **หน้าต่อไป**

จะศึกษาเรื่อง “กฎของเกาส์” จะปรากฏหน้าจอ ดังรูป



**3.2 กฎของเกาส์**  
จากรูป จงหาฟลักซ์ไฟฟ้าเนื่องจากจุดประจุ  $q$  ซึ่งวางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของลูกบาศก์ดังรูป



**วิธีทำ**

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

เนื่องจากสนามไฟฟ้าที่ออกจากจุดประจุไฟฟ้าและเวกเตอร์พื้นที่ที่สนามไฟฟ้าตกกระทบจะไม่ขนานกัน ดังนั้นฟลักซ์ไฟฟ้าหาได้โดยการอินทิเกรต แต่เราทราบว่าจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าที่ออกจากจุดประจุจะไม่มีผลต่อรูปร่างที่ล้อมรอบจุดประจุ ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่างที่ 3.1 ฟลักซ์ไฟฟ้าคือ

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวปิดใด ๆ จะมีค่าเท่ากับจำนวนประจุทั้งหมดที่อยู่ภายในผิวปิดนั้นหารด้วยค่า สหภาพอมของสุญญากาศ ( $\epsilon_0$ ) นั่นคือ

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

เนื่องจากสนามไฟฟ้าที่ออกจากจุดประจุไฟฟ้าและเวกเตอร์พื้นที่ที่สนามไฟฟ้าตกกระทบจะไม่ขนานกัน ดังนั้นฟลักซ์ไฟฟ้าหาได้โดยการอินทิเกรต แต่เราทราบว่าจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าที่ออกจากจุดประจุจะไม่มีผลต่อรูปร่างที่ล้อมรอบจุดประจุ ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่างที่ 3.1 ฟลักซ์ไฟฟ้าคือ

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$


ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวปิดใด ๆ จะมีค่าเท่ากับจำนวนประจุทั้งหมดที่อยู่ภายในผิวปิดนั้นหารด้วยค่า สหภาพอมของสุญญากาศ ( $\epsilon_0$ ) นั่นคือ

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{net}}{\epsilon_0} \quad (\text{กฎของเกาส์})$$

**สรุปการใช้กฎของเกาส์**

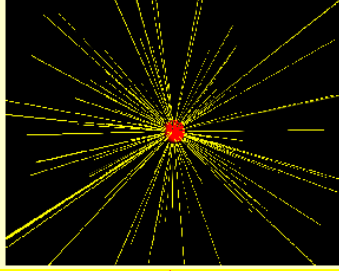
- สร้างผิวปิด (ผิวเกาส์) ล้อมประจุที่ต้องการเป็นรูปทรงอะไรก็ได้ที่สามารถ dot กันได้ โดยไม่ต้องคำนึงถึงมุม  $\theta$  ระหว่าง  $\vec{E}$  กับ  $d\vec{A}$
- สนามไฟฟ้าจะต้องมีขนาดเท่ากันทุก ๆ จุดที่สนามไฟฟ้าตกตั้งฉากกับระนาบของผิวที่สร้างขึ้น
- อินทิเกรตผิวปิดนั้น

ตัวอย่างที่ 3.2

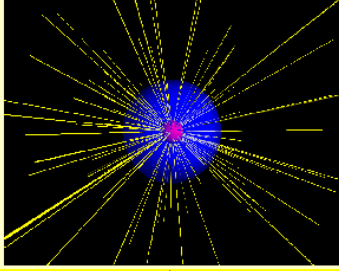
คลิก  << ก่อนหน้า << >> หน้าถัดไป >>

- จากภาพหน้าจอแสดงกฎของเกาส์ เมื่อเลื่อนหน้าจอลงจะพบปุ่ม ตัวอย่างที่ 3.2 คลิกที่ปุ่มนี้ จะแสดงตัวอย่างที่ 3.2 ดังรูป

ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาสนามไฟฟ้าภายในตัวนำและภายนอกตัวนำทรงกลมรัศมี  $R$  มีประจุทั้งหมด  $Q$  และเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้า ( $E$ ) กับระยะทาง ( $r$ )

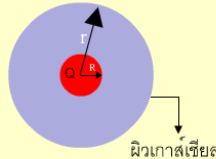


รูปที่ 3.3



รูปที่ 3.4

**วิธีทำ** ภายในตัวนำสนามไฟฟ้าจะเป็นศูนย์ ดังนั้นสนามไฟฟ้าภายนอกตัวนำจะมีทิศทางออกจากจุดศูนย์กลางของทรงกลม (ดังรูปที่ 3.3) สร้างผิว เกาส์เซียน (สีน้ำเงิน) รัศมี  $r$  โดยมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน (ดังรูปที่ 3.4 และ 3.5) สนามไฟฟ้าจะมีค่าเท่ากันและมีทิศทางนอกระหว่างผิวของผิวเกาส์ทุก ๆ จุด ดังนั้นจะได้ว่า



ผิวเกาส์เซียน

รูปที่ 3.5

$$\oint E \cdot dA = \frac{q_{net}}{\epsilon_0}$$

$$E \oint dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

เนื่องจาก  $E$  กับ  $dA$  มีทิศทางนอกระหว่างกัน (ทำมุม 0 องศา) และ  $q_{net} = Q$

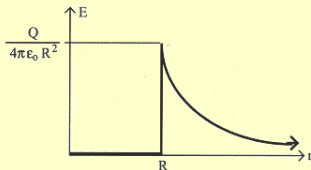
$$\oint E \cdot dA = \frac{q_{net}}{\epsilon_0}$$

$$E \oint dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$


เนื่องจาก  $E$  กับ  $dA$  มีทิศทางนอกระหว่างกัน (ทำมุม 0 องศา) และ  $q_{net} = Q$

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{kQ}{r^2}$$

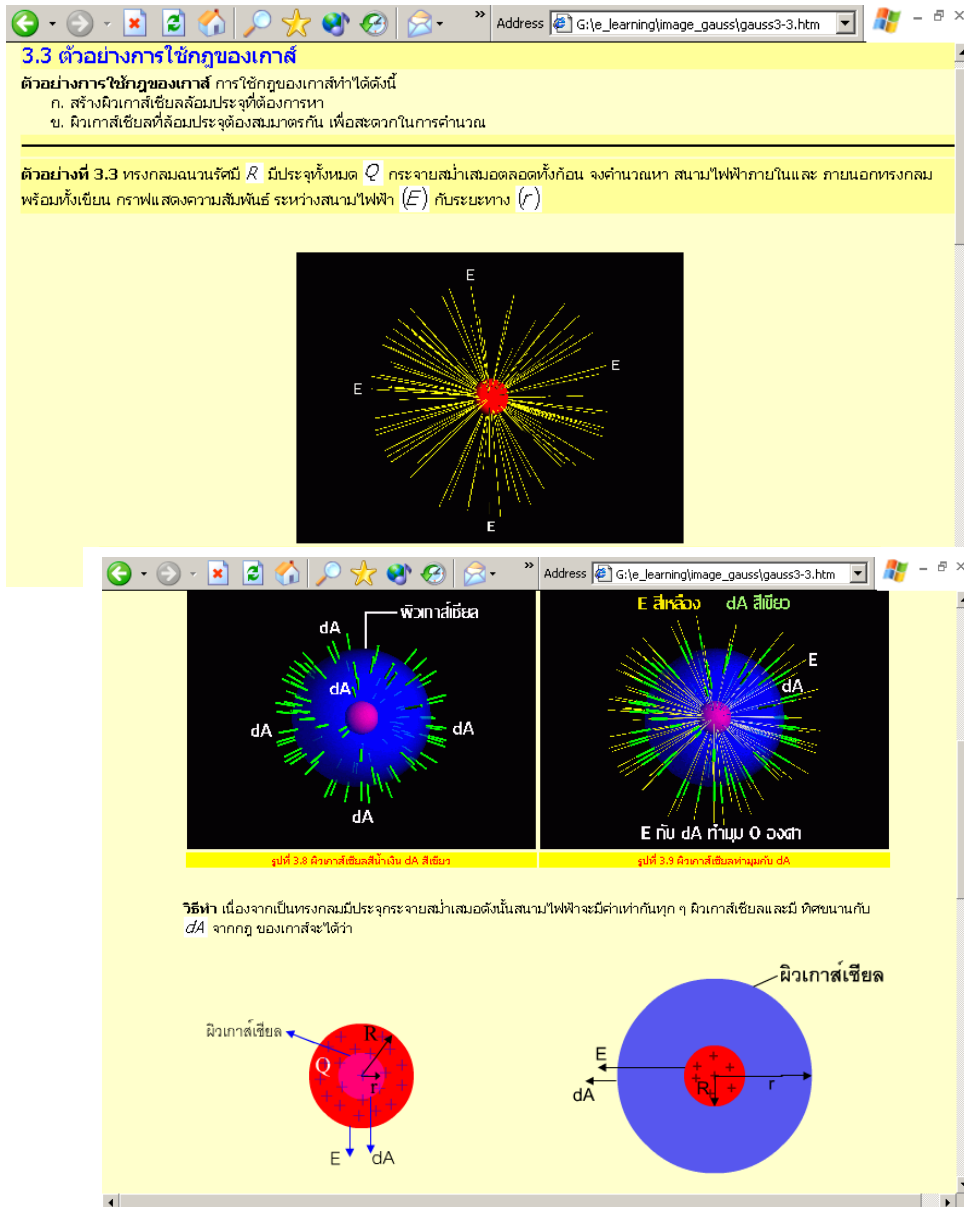


รูปที่ 3.6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $E$  กับ  $r$

2. คลิกที่ปุ่ม  สีเขียวด้านบนมุมซ้าย จะกลับไปหน้าจอก่อนหน้านี้

### 3.3 ตัวอย่างการใช้กฎของเกาส์

คลิกปุ่ม **หน้าต่อไป** จะศึกษาเรื่อง “ตัวอย่างการใช้กฎของเกาส์” จะปรากฏหน้าจอ ดังรูป



**3.3 ตัวอย่างการใช้กฎของเกาส์**  
 ตัวอย่างการใช้กฎของเกาส์ การใช้อีกของเกาส์ทำได้ดังนี้  
 ก. สร้างผิวเกาส์เขี้ยวล้อมประจุที่ต้องการหา  
 ข. ผิวเกาส์เขี้ยวที่ล้อมประจุต้องสมมาตรกัน เพื่อสะดวกในการคำนวณ

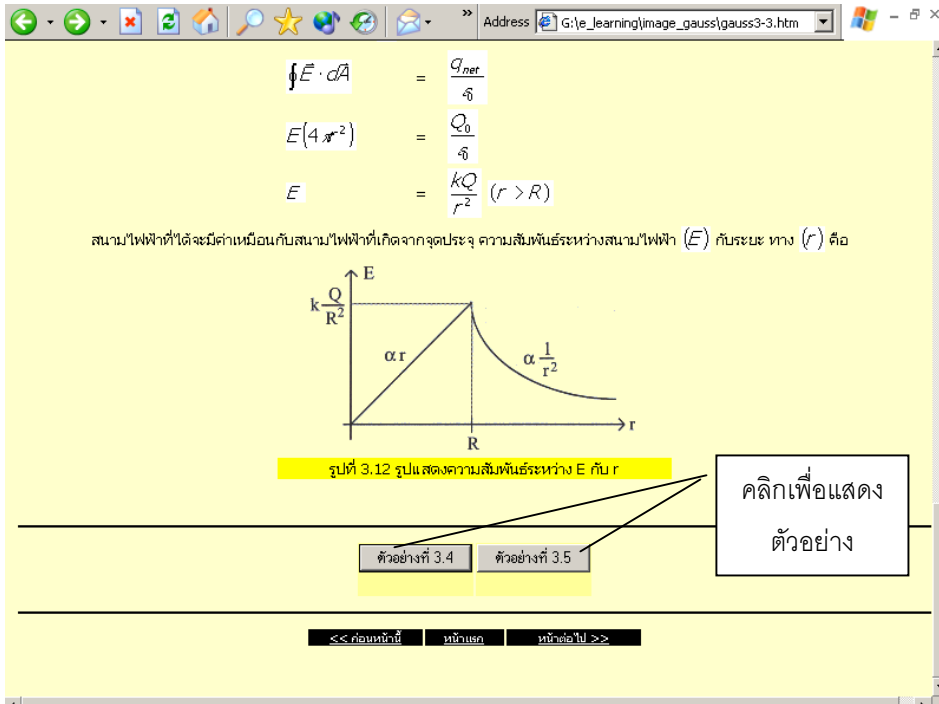
ตัวอย่างที่ 3.3 ทรงกลมฉนวนรัศมี  $R$  มีประจุทั้งหมด  $Q$  กระจายสม่ำเสมอตลอดทั้งก้อน จงคำนวณหา สนามไฟฟ้าภายในและ ภายนอกทรงกลมพร้อมทั้งเขียน กราฟแสดงความสัมพันธ์ ระหว่างสนามไฟฟ้า ( $E$ ) กับระยะทาง ( $r$ )

รูปที่ 3.8 ผิวเกาส์เขี้ยวล้อมประจุ  $dA$  สีเขียว

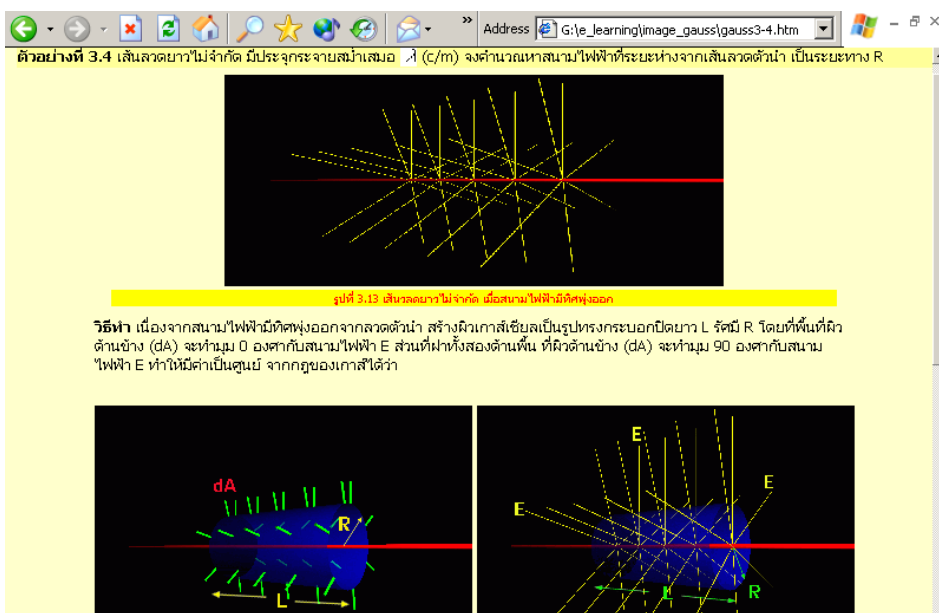
รูปที่ 3.9 ผิวเกาส์เขี้ยวล้อมประจุ  $dA$

วิธีทำ เนื่องจากเป็นทรงกลมมีประจุกระจายสม่ำเสมอ ดังนั้นสนามไฟฟ้าจะมีค่าเท่ากันทุก ๆ ผิวเกาส์เขี้ยวและมีทิศขนานกับ  $dA$  จากกฎของเกาส์จะได้ว่า

1. จากภาพหน้าจอแสดงตัวอย่างการใช้กฎของเกาส์ เมื่อเลื่อนหน้าจอลงจะพบปุ่ม ตัวอย่าง ที่ 3.4 และตัวอย่างที่ 3.5 ดังรูป



2. คลิกที่ปุ่มนี้ ตัวอย่างที่ 3.4 และ 3.5 จะแสดงตัวอย่างทั้งสอง ดังรูป  
ตัวอย่างที่ 3.4



ตัวอย่างที่ 3.5

ตัวอย่างที่ 3.5 แผ่นโลหะตัวนำบางขนาดใหญ่มาก มีประจุกระจายสม่ำเสมอโดยมีความหนาแน่นประจุ  $\sigma$  จงคำนวณหาสนามไฟฟ้า ที่ระยะห่างจากจุดกึ่งกลางของ แผ่นเป็นระยะ

วิธีทำ จากรูปสนามไฟฟ้าจากจุดกึ่งกลางรูปที่ 3.19 โดย

รูปที่ 3.20 รูปทรงกระบอกที่มีพื้นที่หน้าตัด  $A$  สูง  $h$

จากรูปสนามไฟฟ้าจะผ่านเฉพาะพื้นที่หน้าตัดด้านบน ( $A_{top}$ ) และด้านล่าง ( $A_{bottom}$ ) ของทรงกระบอกเท่านั้น ส่วนผิวด้านข้าง ( $A_{side}$ ) จะไม่มีสนามไฟฟ้าจากศูนย์กลาง

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{net}}{\epsilon_0}$$

เนื่องจากสนามไฟฟ้ามีทิศทางออกจากแผ่นโลหะด้านนำ ดังนั้นฟลักซ์ไฟฟ้า (สนามไฟฟ้าที่ผ่านพื้นที่) จะผ่านเฉพาะหน้าตัดด้านบน  $A_{top}$  และล่าง  $A_{bottom}$  จะมีค่าเท่ากันและคงที่ และประจุทั้งหมดที่อยู่ภายใน มีความหนาแน่นคือ  $q_{net} = \sigma A$

$$\int_{A_{top}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{bottom}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_{side}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

3. คลิกที่ปุ่ม สีเขียวด้านบนมุมซ้าย จะกลับไปหน้าจอก่อนหน้านี้

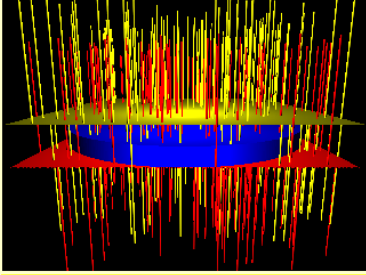
3.4 สนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นตัวนำคู่ขนานที่มีประจุเท่ากันและเป็นชนิดเดียวกัน

คลิกปุ่ม **หน้าต่อไป** จะศึกษาเรื่อง “สนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นตัวนำคู่ขนานที่มีประจุเท่ากันและเป็นชนิดเดียวกัน” จะปรากฏหน้าจอ ดังรูป

3.4 สนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นตัวนำคู่ขนานที่มีประจุเท่ากันและเป็นชนิดเดียวกัน

พิจารณาแผ่นตัวนำคู่ขนานที่มีประจุไฟฟ้าขนาดเท่ากันและเป็นประจุบวกเหมือนกัน โดยมีความหนาแน่นประจุเชิงพื้นที่เท่ากับ  $\sigma$  สนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นหาได้ดังนี้

วิธีทำ สร้างผิวเกาส์ซึ่งมีรูปทรงกระบอกพื้นที่หน้าตัด  $A$  สูงเท่ากับ  $r$  ระหว่างแผ่นตัวนำทั้งสอง



รูปที่ 3.21 สนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นตัวนำคู่ขนาน

จากกฎของเกาส์

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{net}}{\epsilon_0}$$

แต่สนามไฟฟ้าที่เกิดจากแผ่นตัวนำแต่ละแผ่นจากตัวอย่างที่ 3.5 คือ  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  เนื่องจากสนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นมีค่าเท่ากันแต่ ทิศตรงกันข้ามจึงหักล้างกันหมด

1. จากภาพหน้าจอสื่อแสดงการหาค่าสนามไฟฟ้าโดยใช้กฎของเกาส์ของแผ่นตัวนำคู่ขนานมีประจุไฟฟ้าขนาดเท่ากันและเป็นประจุบวกเหมือนกัน โดยจะพบเส้นแรงไฟฟ้าพุ่งออกจากแผ่นประจุทั้งสอง โดยสมการการหาค่าสนามไฟฟ้าจะแสดงไว้บนหน้าจอ